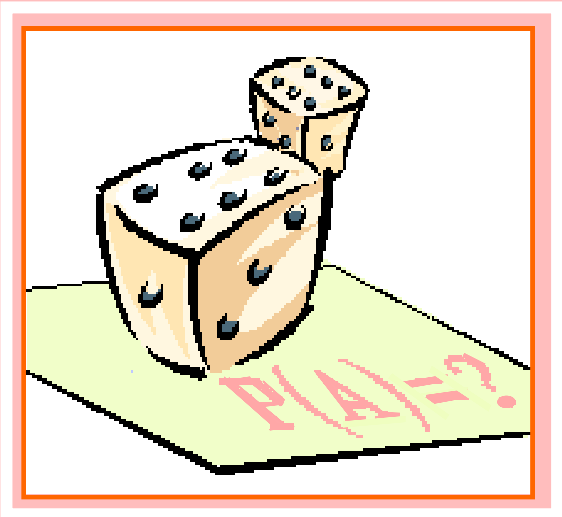
М.І.САМОЙЛЕНКО,
А.І.КУЗНЄЦОВ,
О.Б.КОСТЕНКО

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ



ХАРКІВ
2008

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

М.І.Самойленко, А.І.Кузнєцов, О.Б.Костенко

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як підручник для студентів вищих навчальних закладів

Харків – 2008

ББК 22.171я73
С17
УДК 519.21 (075.8)

Самойленко М.І., Кузнєцов А.І., Костенко О.Б.
С17 Теорія ймовірностей: Підручник. – Харків: ХНАМГ, 2008. – 194 с.

Підручник знайомить з основними поняттями й методами теорії ймовірностей. Наведені методи ілюструються типовими прикладами. Кожна тема закінчується практичним розділом для самостійного набуття навиків щодо використання розглянутих методів при розв'язанні стохастичних задач.

Підручник забезпечено двомовною електронною версією, що включає динамічні фраґменти подання складного навчального матеріалу і здійснення навчальних експериментів.

Для студентів вищих навчальних закладів.

Табл. – 8. Іл. – 55. Бібліогр. – 15 назв.

Гриф надано Міністерством освіти і науки України, рішення № 1.4/18-Г-286 від 29.01.08.

Рецензенти:

д-р техн наук, проф *А.І.Колосов* (Харківська національна академія міського господарства);

д-р техн. наук, проф. *В.М.Левикін* (Харківський національний університет радіоелектроніки);

д-р техн. наук, проф. *А.О.Мамалуй* (Національний технічний університет "ХПІ")

ISBN 966-695-095-2

З М І С Т

ПЕРЕДМОВА

Цей підручник призначений для студентів денної, заочної і дистанційної форм навчання спеціальностей менеджменту й економіки вищих навчальних закладів, які прослухали загальний курс вищої математики.

Основна мета підручника – сприяти подальшому підвищенню рівня фундаментальної математичної підготовки студентів, а також формуванню в них теоретичних знань і практичних навичок використання ймовірнісно-статистичного апарату для вирішення прикладних задач економіки й менеджменту.

Основним завданням вивчення дисципліни є надання студентам відомостей про основні поняття, положення та ключові теореми теорії стохастичних явищ і процесів, а також формування вмінь:

виконувати якісний і кількісний математичний аналіз випадкових подій, випадкових величин і систем таких величин;

використовувати елементи дисперсійного аналізу і теорії кореляції в дослідженні систем випадкових величин;

включати результати досліджень у математичні моделі задач економіки й менеджменту.

Основна особливість підручника – наявність електронної версії, що дозволяє студентам вивчати «Теорію ймовірностей» без особистої участі викладача. На думку авторів, електронний підручник є домінуючим у процесі вивчення дисципліни, оскільки використовує дивовижні можливості сучасних інформаційних технологій. Електронна версія підручника включає ряд динамічних фрагментів, що у процесі навчання дають студенту можливість проводити навчальні експерименти, спостерігати процеси вирішення типових задач і керувати ними, відслідковувати розв'язування багатоетапних задач за схемою алгоритму, будувати графіки й діаграми, графічно інтерпретувати математичні дії і т.п. Гіпертекстова організація викладу навчального матеріалу, наявність гіпертекстового словника термінів, сполученого з предметним покажчиком, можливість багаторазово відтворювати динамічні фраґменти й керувати ними роблять електронний підручник кращим у порівнянні з традиційним підручником. Щоб уникнути тривалих сеансів роботи з електронною версією дисципліни, остання повинна мати традиційний варіант підручника. На будь-якому етапі навчання у студента має бути можливість вибору способу вивчення дисципліни: за допомогою персонального комп'ютера або без нього. Тому ця книга є органічним доповненням електронного підручника до інформаційно-методичного забезпечення самостійного вивчення дисципліни за будь-якою формою навчання.

В С Т У П

Інтенсивний розвиток економіки країни безпосередньо пов'язаний з використанням математичної теорії у прикладній сфері діяльності людини. Вирішальну роль у забезпеченні високоефективної економіки повинні відіграти фахівці, які добре володіють математичними методами і мають достатній досвід їх використання при вирішенні практичних завдань. Теоретичну підготовку таких фахівців здійснює вища школа.

“Теорія ймовірностей” є прикладним розділом вищої математики. Це значить, що знання і вміння, які одержують студенти в результаті вивчення цієї дисципліни, знадобляться їм для вирішення конкретних завдань у майбутній професійній діяльності. Прикладна орієнтація дисципліни не обмежується тільки професійною діяльністю. Ця наука з успіхом може і повинна бути використана для вирішення завдань, що часто виникають у повсякденному житті – в побуті й на роботі. Особливо корисні знання з теорії ймовірностей при оцінці вибору дій, здатних привести до матеріального виграшу або втрат. Не можна людину вважати освіченою, якщо вона не може дати кількісної оцінки, наприклад, доцільності участі в тій або іншій грошово-речовій лотереї, а тим більше пояснити вибір прийнятого рішення з оперативного керування виробництвом.

Методи теорії ймовірностей широко застосовують в різних галузях природознавства і техніки:

- теорії надійності;
- теорії масового обслуговування;
- теоретичній фізиці;
- геодезії;
- астрономії;
- теорії стрільби;
- теорії похибок;
- теорії автоматизованого управління;
- загальній теорії зв'язку;
- медичній і технічній діагностиках;
- теорії розпізнавання образів;
- радіолокаційній техніці;
- стохастичному програмуванні;

- у багатьох інших теоретичних і прикладних науках.

“Теорія ймовірностей” лежить в основі іншої прикладної дисципліни – “Математичної статистики”, що, в свою чергу, використовується при плануванні й організації виробництва, аналізі технологічних процесів, планово-попереджувальному ремонті, контролі якості продукції і для багатьох інших цілей. “Математична статика” є органічним доповненням “Теорії ймовірностей”.

Коротка історична довідка. Перші роботи, в яких зароджувалися основні поняття “Теорії ймовірностей”, являли собою спроби створення теорії азартних ігор (Карданно, Гюйгенс, Паскаль, Ферма та ін. у XVI-XVII ст.).

Наступний етап розвитку “Теорії ймовірностей” пов'язаний з ім'ям Якова Бернуллі (1654-1705). Доведена ним теорема, що згодом одержала назву "Закону великих чисел", була першим теоретичним обґрунтуванням накопичених фактів.

Подальшими успіхами “Теорія ймовірностей” зобов'язана Муавру, Лапласу, Гауссу, Пуассону та ін.

Новий період пов'язаний з іменами П.Л.Чебишова (1821-1894) і його учнів А.А.Маркова і О.М.Ляпунова (1857-1918). У цей період “Теорія ймовірностей” вже стає стрункою математичною наукою.

“Теорія ймовірностей” багато в чому зобов'язана азартним іграм. Саме в результаті азартних ігор було помічено, що досить велике число однорідних подій, незалежно від їхньої конкретної природи, підпорядковуються певним закономірностям. Встановленням цих закономірностей і займається “Теорія ймовірностей”.

Предметом “Теорії ймовірностей” є вивчення стохастичних закономірностей однорідних випадкових масових явищ.

Знання закономірностей, яким підпорядковуються випадкові масові події, дозволяє передбачати, як ці події протікатимуть надалі.

У цілому ***“Теорія ймовірностей і математична статистика”*** являє собою математичну дисципліну, що вивчає кількісні і якісні методи й засоби аналізу закономірностей еволюції систем прикладного характеру, що розвиваються в умовах стохастичної невизначеності.

1. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

1.1. Класичне визначення ймовірності

1.1.1. *Необхідність і випадковість*

Теорія про причинно-наслідкові зв'язки стверджує, що в об'єктивній дійсності має місце причинно-наслідковий ланцюжок подій. Кожна наступна подія обумовлена й визначена попередніми подіями. Тому в кожний момент часу відбувається та і тільки та подія, яка *повинна* відбутися. Подія, що відбувається, є наслідком попередніх подій у ланцюжку. Подія, що відбулася, сама стає причиною наступних подій.

Зі сказаного випливає, що в об'єктивній дійсності випадково ніщо не відбувається і не може відбутися.

На перший погляд, це твердження ставить під сумнів право на існування теорії ймовірностей, предметом дослідження якої є випадкові події, явища, процеси та їх закономірності.

Щоб примирити обидві теорії, розглянемо два експерименти з киданням монети.

Для першого експерименту створимо ідеальні умови. Нехай монета багаторазово кидається:

– з наданням їй однакового моменту імпульсу сили, прикладеного до однієї і тієї ж точки монети;
– у безповітряному просторі;
– з однакової висоти;
– з того самого вихідного положення монети;
– на горизонтальну поверхню з однаковою пружністю в кожній її точці.

При багаторазовому повторенні описаного експерименту будемо одержувати той самий результат – або "орел", або "решку" (залежно від вихідного положення монети). Тобто результат експерименту не є випадковим.

Другий експеримент будемо проводити без дотримання будь-яких ідеальних умов: так, як це робиться в повсякденному побуті при киданні жереба. При багаторазовому повторенні такого експерименту в 50 відсотках результатом буде "орел" і 50 відсотках – "решка", причому передбачити заздалегідь результат будь-якого експерименту неможливо. Тобто результат будь-якого нового експерименту є випадковим.

Висновок. Якщо ми не можемо врахувати або свідомо зневажаємо будь-які суттєві чинники, що впливають на протікання експерименту (процесу, явища), то він автоматично стає випадковим. При багаторазовому повторенні випадкового експерименту він може протікати по-різному, і передбачити точний його хід неможливо.

1.1.2. Основні визначення

Знайомство з основами теорії ймовірностей починається з теми «Випадкові події».

Визначення 1.1. ***Подією*** називається усякий факт, який в результаті експерименту може відбутися або не відбутися.

Подія завжди пов'язана з експериментом.

Визначення 1.2. Під ***експериментом*** (випробуванням) розуміють деяку сукупність умов, в яких спостерігається те або інше явище, фіксується той або інший результат.

Приклади: кидання монети – експеримент, випадіння "орла" або "решки" – подія; виймання карти з преферансної колоди – експеримент, поява червоної або чорної масті – подія; проведення лекції – експеримент, присутність студента на лекції – подія.

Примітка. У цьому підрозділі (в електронному варіанті підручника) теоретичний матеріал супроводжується експериментом, що полягає в однократному киданні гральної кістки і спостереженні за числом очок, що випадає на її верхній грані. Кістка має шість граней, на кожній з яких намальовані точки, що відповідають числу очок від одного до шести. Результатом такого експерименту може бути випадіння 1,2,3,4,5 або 6 очок. Експеримент можна повторювати необмежену кількість разів. Для виклику експерименту треба клацнути лівою кнопкою миші на позначці

. Надалі будемо використовувати цю позначку як посилання на експеримент з киданням гральної кістки.

Коли людина аналізує випадкову подію, її насамперед цікавить, як часто подія може відбутися або не відбутися в результаті експерименту. З цією метою вводиться спеціальна характеристика – *ймовірність події*.

Визначення 1.3. ***Ймовірністю події*** називається чисельна міра ступеня об'єктивної можливості появи події в результаті нового експерименту.

У теорії ймовірностей прийнято події позначати заголовними латинськими літерами A, B і т.д., а ймовірності подій – відповідно $P(A)$, $P(B)$ і т.д.

Ймовірність довільної події (позначимо її через A) лежить у межах від нуля до одиниці: $0 \leq P(A) \leq 1$. Останнє співвідношення часто називають шкалою ймовірностей.

При вирішенні будь-яких задач необхідно стежити за тим, щоб ні в яких кінцевих або проміжних результатах не з'явилися значення ймовірності якоїсь події, що перевищує межі зазначеної шкали.

Усі події діляться на *достовірні*, *неможливі* й власне *випадкові*.

Визначення 1.4. ***Достовірною*** називається подія, яка в результаті експерименту неодмінно повинна відбутися (позначається: U).

Ймовірність достовірної події дорівнює одиниці: $P(U) = 1$.

Визначення 1.5. ***Неможливою*** називається подія, яка в результаті експерименту не може відбутися (позначається: $\varnothing$).

Ймовірність неможливої події дорівнює нулю: $P(\varnothing) = 0$.

Визначення 1.6. ***Випадковою*** називається подія, яка при багаторазовому повторенні експерименту в одних виходах відбувається, а в інших – ні.

Ймовірність випадкової події (позначимо її через A) більше нуля і менше одиниці: $0 < P(A) < 1$.

Як приклади розглянемо експерименти з киданням гральної кістки. Так, при однократному киданні гральної кістки випадіння:

– не більше шести очок є достовірною подією;
– десятьох очок – неможливою подією;
– трьох очок – випадковою подією.

Одним з ключових завдань розділу "Випадкові події" є чисельне визначення ймовірності випадкових подій. Перед тим як перейти до визначення ймовірності найпростіших подій, введемо ще ряд визначень.

Визначення 1.7. Декілька подій в експерименті називаються ***рівноможливими***, якщо за умовами симетрії експерименту немає підстави вважати появу якоїсь з них більш можливою, ніж появи інших.

Рівноможливі події мають рівний ступінь об'єктивної можливості відбутися в результаті експерименту.

В умовах експерименту  як приклади *рівноможливих* подій можуть виступати події, що полягають у випадінні:

– 1, 2, 3, 4, 5, 6 очок;
– парного і непарного числа очок.

Прикладом *нерівноможливих* подій є випадіння двох очок і непарного числа очок.

Визначення 1.8. Декілька подій називаються ***несумісними***, якщо ніякі дві з них не можуть відбутися одночасно в одному експерименті.

Звертаючись знову до експерименту  як приклади несумісних подій можна відзначити випадіння:

– 1, 2, 3, 4, 5, 6 очок;
– парного і непарного числа очок.

Прикладом сумісних подій є випадіння одного і непарного числа очок.

Визначення 1.9. ***Повною групою*** подій називаються декілька попарно несумісних подій таких, що в результаті експерименту одна з них неодмінно повинна відбутися.

В експерименті  повною групою подій є випадіння:

– 1, 2, 3, 4, 5, 6 очок;
– парного і непарного числа очок.

Визначення 1.10. Якщо виходи експерименту утворюють повну групу несумісних рівноможливих подій, то вони називаються ***випадками.***

В умовах експерименту  випадками є виходи, що полягають у випадінні:

– 1, 2, 3, 4, 5, 6 очок;
– парного і непарного числа очок.

Визначення 1.11. Випадок називається ***сприятливим*** до події, якщо його поява тягне за собою появу цієї події.

Приклад. Нехай подія A полягає у випадінні непарного числа очок в експерименті . Тоді серед шести випадків, що полягають у випадінні 1, 2, 3, 4, 5 або 6 очок, сприятливими до події A будуть тільки три – випадіння 1, 2 або 3 очок.

1.1.3. Класичне визначення ймовірності

Ймовірність події A як можливого виходу деякого експерименту визначається відношенням кількості випадків, що сприятливі для події A, до загальної кількості випадків у даному експерименті.

Таким чином, якщо m – кількість випадків, що сприятливі для події A, а n – загальна кількість випадків у даному експерименті, то ймовірність події A

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad . \tag{1.1}$$

Співвідношення (1.1) є класичною формулою обчислення ймовірності подій, які можуть виникати в результаті експерименту з виходами, що підпадають під *визначення 1.9*. Обчислення ймовірності події за класичною формулою (1.1) обумовлює наступну послідовність дій (алгоритм):

1. Визначення загальної кількості випадків в експерименті, запропонованому за умовами задачі.
2. Визначення кількості випадків, що сприятливі для події, ймовірність якої необхідно знайти за умовами задачі.
3. Обчислення шуканої ймовірності події як відношення чисел, знайдених у п. 1 і 2.

Наведену методику визначення ймовірності події називають схемою випадків.

Приклад 1.1. Нехай в умовах експерименту слід визначити ймовірність випадіння парного числа очок.

Розв'язання першим способом. Як випадки при киданні гральної кістки розглядаємо групу подій: випадіння 1, 2, 3, 4, 5 і 6 очок. Тоді:

- загальна кількість випадків в експерименті – шість;
- кількість випадків, що сприятливі для події "парне число очок", – три: випадіння 2, 4 і 6 очок;
- шукана ймовірність – 3/6, або 1/2.

Розв'язання другим способом. Як випадки при киданні гральної кістки розглядаємо групу подій: випадіння "парного" і "непарного" числа очок:

- загальна кількість випадків в експерименті – два;
- кількість випадків, що сприятливі для події "парне число очок", – один (випадок "парне");
- шукана ймовірність – 1/2.

Як бачимо, результат вирішення не залежить від того, яку повну групу подій експерименту вважати випадками. Бажано тільки, щоб через випадки цієї групи можна було визначити шукану ймовірність події.

Слід зауважити, що не завжди всі можливі або сприятливі випадки в експерименті знаходяться так просто, як у *прикладі 1.1*. На підтвердження сказаного розглянемо ще два приклади.

Приклад 1.2. В ящику знаходиться 100 деталей, з них 10 бракованих. Навмання витягують 4 деталі. Знайти ймовірність події *A* – наявність рівно трьох стандартних деталей серед витягнутих.

Як бачимо, тут усі можливі виходи експерименту являють собою комбінації 4 деталей, серед яких можуть бути групи, що складаються з деталей:

– тільки бракованих;
– трьох бракованих і однієї стандартної;
– двох бракованих і двох стандартних;
– однієї бракованої і трьох стандартних;
– тільки стандартних.

Сприятливі виходи являють собою одну групу комбінацій, що складаються з трьох стандартних і однієї бракованої деталей.

Цілком очевидно, що визначення кількості комбінацій у кожній групі методом прямого перебору являє собою досить складне завдання.

Приклад 1.3. З п'ятьох літер розрізної абетки складене слово “КНИГА”. Дитина, яка не вміє читати, розсипала літери, а потім зібрала їх у довільному порядку. Знайти ймовірність того, що знову утворилося слово “КНИГА”.

У цьому прикладі загальна кількість випадків визначається кількістю можливих перестановок літер, з яких складається слово “КНИГА”, і ця кількість досить значна.

Задачами на відшукання кількості комбінацій елементів, подібними наведеним у *прикладах 1.2 – 1.3*, займається розділ математики, відомий як комбінаторика. У наступному підрозділі наведені найбільш важливі комбінаторні співвідношення. Після ознайомлення з цим підрозділом ми повернемося до розв’язання *прикладів 1.2 – 1.3*.

1.2. Елементи комбінаторики

1.2.1. Основні принципи комбінаторики

Основні принципи комбінаторики дозволяють визначати загальну кількість різних способів виконання певної роботи залежно від способів виконання окремих її операцій і їх відношень між собою.

1.2.1.1. Правило додавання

Нехай деяку роботу можна виконати за допомогою k ***взаємовиключних*** операцій. При цьому перша операція може бути реалізована n_1 способами, друга – n_2 способами, ... , k-а – n_k способами. Тоді роботу можна виконати $n_1 + n_2 + ... + n_k$ способами.

1.2.1.2. Правило множення

Нехай деяку роботу можна виконати за допомогою k ***послідовних*** операцій. При цьому перша операція може бути реалізована n_1 способами, друга – n_2 способами, ... , k-а – n_k способами. Тоді всю роботу можна виконати $n_1 * n_2 * ... * n_k$ способами.

Приклад 1.4. Скільки сигналів можна подати з корабля за допомогою чотирьох прапорів різного кольору, розміщуючи їх на щоглі, якщо кожний сигнал повинний складатися не менше ніж з двох прапорів?

Розв'язання. Сигнали можна подавати двома, трьома і чотирма прапорами.

Першим для сигналу з двох прапорів може бути будь-який з наявних 4 прапорів (4 способи), після чого другим – будь-який з трьох що залишилися (3 способи). Тоді, відповідно до правила множення, кількість можливих способів подачі сигналу з 2 прапорів складе 4*3=12.

Аналогічно для сигналу з трьох прапорів маємо: 4*3*2=24 способи.

Нарешті, для сигналу з 4 прапорів одержимо 4*3*2*1=24 способи.

Усі розглянуті вище варіанти припускають виконання послідовних операцій на вибір прапора для сигналу і тому розраховуються за правилом множення. Однак подачі сигналів 2, 3 і 4 прапорами є ***взаємовиключними*** операціями, тому загальну кількість сигналів можна одержати як суму способів для сигналів з 2, 3 і 4 прапорів, тобто 24+24+12=60 способами. Таким чином, для визначення загальної кількості сигналів використовується правило додавання.

1.2.2. Основні види комбінаторних з'єднань

В комбінаториці розрізняють три види різних з'єднань (комбінацій) елементів довільної множини:

– перестановки;
– розміщення;
– сполучення.

При вирішенні багатьох задач теорії ймовірностей часто доводиться звертатися до формул комбінаторики, що дозволяють без здійснення повного перебору можливих з'єднань визначати їх загальну кількість.

Розглянемо послідовно всі види з'єднань і відповідні формули підрахунку їх кількості.

1.2.2.1. Перестановки

Визначення 1.12. ***Перестановками*** з m елементів називають такі їх з'єднання, що відрізняються одне від одного порядком входження елементів.

Загальна кількість можливих перестановок з m елементів позначається P_m і визначається виразом

$$P_m = m! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m \,. \qquad (1.2)$$

Приклад 1.5. Скількома способами можна розташувати на полиці в ряд три різні книги?

Розв'язання. Загальна кількість можливих способів розташування книг визначається відповідно до виразу (1.2): $P_3 = 3! = 6$.

Легко помітити, що такий же результат можна одержати, застосовуючи правило множення. На перше місце на полицю можна поставити будь-яку з 3 книг (3 способи), після чого на друге місце – будь-яку з двох, що залишилися (2 способи), після чого на третьому місці буде стояти остання не розміщена книга (1 спосіб), що за правилом множення дає 3*2*1=6 способів. Таким чином, правило множення можна вважати логічним обґрунтуванням формули (1.2).

1.2.2.2. Розміщення

Визначення 1.13. Розміщеннями з n елементів по m називають такі з'єднання m елементів, що відрізняються одне від одного принаймні одним новим елементом або порядком їх входження $(m \le n)$.

Загальна кількість можливих розміщень з n елементів по m позначається A_n^m і визначається виразом

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \qquad (1.3)$$

Приклад 1.6. Скількома способами можна вибрати дві книги з трьох і розташувати їх у ряд на полиці.

Розв'язання. Загальна кількість можливих способів розташування книг визначається відповідно до виразу (1.3): $A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$.

Знову ж, підставою для застосування формули (1.3) є правило множення. На перше місце на полицю можна поставити будь-яку з 3 книг (3 способи), після чого на друге – будь-яку з двох, що залишилися (2 способи). За правилом множення це складає 3*2=6 способів.

1.2.2.3. Сполучення

Визначення 1.14. Сполученнями з n елементів по m називають такі з'єднання m елементів, що відрізняються одне від одного принаймні одним новим елементом $(m \le n)$.

Загальна кількість можливих сполучень з n елементів по m позначається C_n^m і визначається виразом

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \qquad (1.4)$$

Приклад 1.7. Скількома способами можна вибрати дві книги з трьох.

Розв'язання. Загальна кількість можливих способів вибору книг визначається відповідно до виразу (1.4): $C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$.

Ця задача відрізняється від *прикладу 1.6* тим, що 2 книги, наприклад, *AB* і *BA*, є різними розміщеннями й однаковими сполученнями, тобто в сполученнях не враховується порядок елементів. Отже кількість сполучень може бути отримано з числа розміщень шляхом його ділення на число перестановок, що вибираються. У даному випадку число розміщень 3 книг по 2 дорівнює 6; число перестановок з двох книг, що вибираються (або тих, що розміщуються у *прикладі 1.6*), дорівнює двом, так що вибрати 2 книги з 3 можна 6/2 = 3 способами.

Загальний зв'язок між перестановками, розміщеннями і сполученнями показаний нижче у формулі (1.7).

1.2.2.4. Корисні співвідношення

При вирішенні ряду задач можуть бути корисними наступні співвідношення:

$$0! = 1; \qquad 1! = 1; \qquad (1.5)$$

$$C_n^m = C_n^{n-m}; \qquad (1.6)$$

$$P_m = \frac{A_n^m}{C_n^m}; \qquad (1.7)$$

$$C_n^0 = 1; \qquad C_n^n = n; \qquad C_n^1 = n. \qquad (1.8)$$

1.2.3. Приклади комбінаторних задач

Приклад 1.8. У коробці лежать 9 білих і 4 чорних кулі. Виймають навмання дві кулі. Знайти ймовірність того, що вони:

а) білі;

б) чорні;

в) різнокольорові;

г) обидві білі або обидві чорні.

Розв'язання. Позначимо події:

A – кулі білі,

B – кулі чорні,

C – кулі різнокольорові,

D – кулі або білі, або чорні.

Для вирішення задачі використовуємо *класичну формулу ймовірності* (1.1):

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

що потребує обчислення загальної кількості n випадків в експерименті і кількості m сприятливих випадків для кожної з подій A, B, C, D, які ми позначимо відповідно m_A, m_B, m_C, m_D.

Загальна кількість випадків n в експерименті – це кількість комбінацій з 13=(9+4) куль по 2, тобто $n = C_{13}^2 = 78$.

а) Для події A кількість сприятливих випадків m_A – це кількість різних комбінацій з 9 білих куль по 2, тобто $m_A = C_9^2 = 36$.

Таким чином, $P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{36}{78} = \frac{6}{13}$.

б) Для події B кількість сприятливих випадків m_B – це кількість різних комбінацій з 4 чорних куль по 2, тобто $m_B = C_4^2 = 6$.

Таким чином, $P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{6}{78} = \frac{1}{13}$.

в) Для події C кількість сприятливих випадків m_C визначається відповідно до правила множення: $m_C = 4*9 = 36$.

Таким чином, $P(C) = \frac{m_C}{n} = \frac{36}{78} = \frac{6}{13}$.

г) За результатами задач ***а)*** і ***б)*** даного прикладу дві білі кулі можна одержати m_A = 36 способами, а дві чорні – m_B = 6 способами. Тоді за правилом додавання m_D=36+6=42 .

Таким чином, $P(D) = \dfrac{m_D}{n} = \dfrac{42}{78} = \dfrac{7}{13}$.

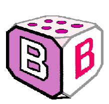
Повернемося до розгляду *прикладів 1.2* і *1.3*.

Розв'язання прикладу 1.2. Загальна кількість можливих комбінацій по 4 деталі зі 100, що відрізняються принаймні однією новою деталлю, визначається як $n = C_{100}^4$. Усі вони утворюють повну групу несумісних рівноможливих випадків. Підрахуємо кількість сприятливих випадків до події A. Три стандартні деталі з 90 наявних у ящику можна витягти C_{90}^3 способами. З кожною отриманою вибіркою з 3 стандартних деталей може сполучитися одна нестандартна деталь з 10 наявних у ящику C_{10}^1 способами. Отже за правилом множення $m = C_{90}^3 \cdot C_{10}^1$, а $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{C_{90}^3 \cdot C_{10}^1}{C_{100}^4} = 0{,}3$.

Розв'язання прикладу 1.3. З п'ятьох літер дитина може скласти різні з'єднання, що відрізняються одне від одного тільки порядком входження літер. Тому загальну кількість усіх можливих виходів експерименту знайдемо як кількість перестановок з 5 елементів: $n = P_5 = 5! = 120$. Усі виходи утворюють повну групу несумісних рівноможливих випадків, з яких тільки один сприятливий до відновлення слова "КНИГА". Отже шукана ймовірність $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{1}{120}$.

1.3. Алгебра подій

1.3.1. Простір подій



Визначення 1.15. Подія, якій відповідає тільки один вихід (результат) експерименту, називається ***елементарною подією***.

В умовах експерименту  випадки випадіння 1, 2, 3, 4, 5 і 6 очок одночасно є й елементарними подіями. Позначимо їх як елементи множини $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ так, щоб елемент a_1 відповідав появі 1 очка, елемент a_2 – 2 очок і так далі. Тоді

$$\mathbf{U} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}. \quad (1.9)$$

є множина елементарних подій, або *простір подій*.

Визначення 1.16. Множина **U** елементарних подій, що складають повну групу несумісних подій, називається ***простором подій***.

Випадкові події можна розглядати як підмножини, що складені з елементів множини **U**. Так, в умовах експерименту :

– підмножина $\mathbf{B} = \{a_2, a_4, a_6\}$ відповідає випадковій події, що полягає у випадінні парного числа очок;
– підмножина $\mathbf{C} = \{a_1, a_2\}$ відповідає випадковій події, що полягає у випадінні не більш ніж двох очок;
– підмножина $\mathbf{D} = \{a_6\}$ відповідає випадковій події, що полягає у випадінні шести очок.

Визначення 1.17. Довільний набір елементарних подій з простору подій **U** є випадковою подією.

Визначення 1.18. Елементарні події, що відповідають елементам з підмножини випадкової події, називаються ***сприятливими*** для цієї події.

Визначення 1.19. Якщо події не відповідає жодний елемент з простору подій, то вона називається ***неможливою*** (позначається $\varnothing$).

Визначення 1.20. Якщо події відповідають всі елементи з простору подій, то вона називається ***достовірною*** (позначається **U**).

Наведені визначення, що зроблені на основі поняття простору подій, ні в якій мірі не суперечать аналогічним визначенням, зробленим у підрозділі 1.1. Водночас на їхній основі на початку 20-х років XX ст. академіком А.Н.Колмогоровим був запропонований аксіоматичний підхід до розв'язування стохастичних задач. Він базується на схемі випадків і значно розширює рамки цієї схеми, дозволяючи, зокрема, розкладати більш складні подіє на прості й потім обчислювати їхню ймовірність.

Для одного й того самого експерименту може бути побудовано декілька просторів подій залежно від того, які елементарні події його складають. Так, в умовах експерименту  елементарні події b_1 (випадіння парного числа очок) і b_2 (випадіння непарного числа очок) формують новий простір подій $\mathbf{U}_1 = \{b_1, b_2\}$.

Загальна кількість різних випадкових подій для простору подій з n елементів визначається величиною 2^n, що включає неможливу і достовірну події. Так, у просторі $\mathbf{U}_1$ може бути визначено $2^2=4$ різних випадкових подій, а просторі $\mathbf{U}$, що відповідає виразу (1.1), – $2^6=64$.

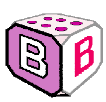
1.3.2. Операції над подіями

Прості випадкові події можуть утворювати складні події, а складні – ще більш складні. Наприклад, подія A_{2k}, що полягає у випадінні парного числа очок в експерименті , утворюється з трьох простих випадкових подій: A_2 – випадіння 2 очок, A_4 – випадіння 4 очок, A_6 – випадіння 6 очок. Більш складна подія A, що полягає у випадінні парного числа очок або числа очок, кратних трьом, складається з двох менш складних подій:

- A_{2k} – випадіння парного числа очок (події A_2, A_4, A_6);
- A_{3k} – випадіння числа очок, кратного трьом (події A_3, A_6).

Теорія ймовірностей, як це буде показано в наступному підрозділі, дає дослідникам можливість за відомими ймовірностями простих подій розраховувати ймовірності складних подій. Але щоб скористатися цією можливістю, необхідно володіти умінням розкладати складні події на прості або складати з простих подій складні. Для розкладання або утворювання складних подій досить володіти двома операціями над подіями: додаванням і множенням.

1.3.2.1. Сума подій



Визначення 1.21. ***Сумою*** двох подій A і B називають таку подію C, що відбувається тоді, коли відбувається або подія A, або подія B, або події A і B одночасно в одному експерименті.

Суму подій A і B прийнято записувати в такий спосіб: $A + B = C$.

Операція додавання має місце, коли прості події об'єднуються у складну з використанням сполучника "або".

Використання сполучника "або" еквівалентно використанню слово-сполучення "хоча б". Так, *визначення 1.21* з використанням цього слово-сполучення звучало б так: "***Сумою*** двох подій A і B називають таку подію C, що відбувається тоді, коли відбувається принаймні одна з подій A і B.

Приклад 1.9. Нехай в умовах експерименту подія $A=\{a_1,\ a_3,\ a_5\}$ визначається як випадіння непарного числа очок, а подія $B=\{a_3,\ a_6\}$ – як випадіння числа очок, кратного трьом. Тоді подія $C=\{a_1,\ a_3,\ a_5,\ a_6\}$. , що полягає у випадінні непарного числа очок або числа очок, кратного трьом, буде сумою подій A і B.

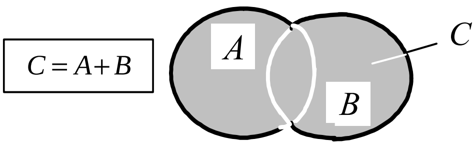


Рис.1.1

На рис.1.1 подана графічна інтерпретація операції додавання подій .A і B. Тут область A є множиною точок, які відповідають елементарним виходам експерименту, що сприяють події A; область B – події B; область C – принаймні одній з подій A і B.

Операція додавання може бути узагальнена на додавання декількох подій. У цьому випадку сумою декількох подій буде подія, що полягає у появі принаймні однієї з тих, що додаються.

1.3.2.2. Добуток подій

Визначення 1.22. *Добутком* двох подій A і B називають таку подію D, що відбувається тоді, коли відбувається і подія A, і подія B одночасно в одному експерименті.

Добуток подій A і B прийнято записувати в такий спосіб: $A * B = D$.

Операція множення має місце, коли прості події об'єднуються у складну з використанням сполучника "і".

Приклад 1.10. Нехай в умовах експерименту подія $A=\{a_1, a_3, a_5\}$ визначається як випадіння непарного числа очок, а подія $B=\{a_3, a_6\}$ – як випадіння числа очок, кратного трьом. Тоді подія $D=\{a_6\}$, що полягає у випадінні непарного числа очок і одночасно кратного трьом, буде добутком подій A і B .

$D = A * B$

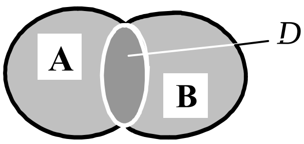


Рис.1.2

На рис.1.2 подана графічна інтерпретація операції множення подій A і B. Тут область A є множиною точок, які відповідають елементарним виходам експерименту, що сприяють події A; область A – події B; область D є множиною точок, які відповідають елементарним виходам експерименту, що одночасно сприяють і події A, і події B.

Операція множення може бути узагальнена на множення декількох подій. У цьому випадку добутком декількох подій буде подія, що полягає в одночасній появі в одному експерименті всіх подій.

1.3.3. Властивості операцій додавання і множення

Операції додавання і множення подій мають наступні властивості:

- ***комутативність:***

$$A+B = B+A \,;$$

$$A*B = B*A \,;$$

- ***асоціативність:***

$$(A+B)+C = A+(B+C) \,;$$

$$(A*B)*C = A*(B*C) \,;$$

- ***дистрибутивність:***

$$A*(A+B) = A*B + B*C \,.$$

Корисні формули:

- для Ø-події: $A + \varnothing = A$; $A * \varnothing = \varnothing$;
- для U-події: $A + U = U$; $A * U = A$;
- для випадкової події: $A + A = A$; $A * A = A$.

1.4. Практикум і запитання для самоконтролю

1.1. Яка основна мета дисципліни?

1.2. В яких галузях людської діяльності використовуються методи "Теорії ймовірностей”?

1.3. Що є предметом вивчення "Теорії ймовірностей”?

1.4. При яких умовах явище вважається випадковим?

1.5. Дати визначення поняття "*подія*".

1.6. Дати визначення поняття "*експеримент*".

1.7. Дати визначення поняття "*ймовірність події*".

1.8. Дати визначення поняття "*достовірна подія*".

1.9. Чому дорівнює ймовірність достовірної події?

1.10. Дати визначення поняття "*неможлива подія*".

1.11. Чому дорівнює ймовірність неможливої події?

1.12. Дати визначення поняття "*випадкова подія*".

1.13. Які значення може приймати ймовірність випадкової події?

1.14. Які випадкові події називаються рівноможливими?

1.15. Які випадкові події називаються несумісними?

1.16. Дати визначення поняття "*повна група подій*".

1.17. Які випадкові події називаються випадками?

1.18. Які випадки називаються сприятливими для події?

1.19. Надати класичну формулу розрахунку ймовірності події?

1.20. Кидають дві монети. Яка ймовірність того, що принаймні на однієї випаде "решка"?

Розв’язання. Позначимо: A – подія, що полягає в появі принаймні однієї "решки" при киданні двох монет. Тоді $P(A)$ – шукана ймовірність.

Можливими виходами експерименту є чотири випадки:

– перший: на першій монеті – "орел", на другій також "орел";
– другий: на першій монеті – "орел", на другій – "решка";
– третій: на першій монеті – "решка", на другій – "орел";
– четвертий: на першій монеті – "решка", на другій також "решка".

Отже загальна кількість можливих виходів експерименту $n = 4$.

З чотирьох випадків другий, третій і четвертий є сприятливими для розглянутої події. Отже кількість сприятливих виходів $m = 3$.

Підставляючи у класичну формулу визначення ймовірності знайдені значення для n і m, одержимо: $P(A) = m/n = 3/4$.

1.21. У лототроні знаходяться 37 куль з числами 1,2,...,37. Яка ймовірність появи кулі з числом, кратним 10, у результаті одного запуску лототрону?

1.22. Кидають дві монети. Яка ймовірність того, що на одній випаде "решка", а на іншій – "орел"?

1.23. Кидають послідовно дві монети. Яка ймовірність того, що на першій монеті випаде "решка", а на другій – "орел"?

1.24. З колоди для преферансу, що містить 32 карти, навмання виймають одну. Яка ймовірність того, що нею опиниться "дама", "король" або "валет"?

1.25. В академічній групі 25 студентів. У трьох студентів прізвище починається на літеру "А", у двох – на "О", в одного – на "І", в інших – на приголосну. Викладач навмання викликає одного студента. Яка ймовірність того, що його прізвище починається на приголосну літеру?

1.26. Які комбінаторні з'єднання розрізнюють у комбінаториці?

1.27. Дати визначення комбінаторного поняття "*перестановки з m елементів*".

1.28. Яким способом обчислюється загальна кількість перестановок з m елементів?

1.29. Скільки перестановок можна скласти з 5 елементів?

1.30. Дати визначення комбінаторного поняття "*розміщення з n елементів по m".*

1.31. Яким способом обчислюється загальна кількість розміщень з n елементів по m ?

1.32. Скільки можна скласти розміщень з 5 елементів по 3 ?

1.33. Дати визначення комбінаторного поняття "*сполучення з n елементів по m*".

1.34. Яким способом обчислюється загальна кількість сполучень з n елементів по m ?

1.35. Скільки можна скласти сполучень з 5 елементів по 3?

1.36. У вагоні трамваю 15 двомісних крісел. Скількома способами на них можуть розміститися 30 пасажирів?

1.37. На станції є 8 запасних шляхів. Скількома способами на них можна розставити три різні потяги?

1.38. Скількома різними способами можна розкласти в дві кишені 10 монет різної вартості по рівній кількості монет?

1.39. Скільки різних тризначних чисел можна скласти за допомогою цифр 1, 2, 3?

1.40. Скільки різних тризначних чисел можна скласти за допомогою цифр 1, 2, 3, 4?

1.41. Скільки різних тризначних чисел можна скласти за допомогою цифр 0, 1, 2, 3?

1.42. Скільки натуральних чисел можна скласти за допомогою цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, щоб перша цифра була 1, друга – 2 і щоб отримані числа ділилися на 5?

1.43. Скільки натуральних чисел можна скласти за допомогою цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, щоб перша цифра була 1 і щоб отримані числа ділилися на 5?

1.44. Скільки сигналів можна подати за допомогою 6 прапорців різного кольору?

1.45. Скільки різних ***а*)** чотирицифрових, ***б*)** семизначних чисел, що діляться на 25, можна скласти за допомогою цифр 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8?

1.46. Між перестановками цифр числа 12345 скільки є таких, що не закінчуються ***а*)** п'ятіркою, ***б*)** числом 45, ***в*)** числом 345?

1.47. Набираючи номер телефону, абонент забув дві останні цифри і, пам'ятаючи, що вони різні, набрав їх навмання. Знайти ймовірність того, що набрані потрібні цифри.

1.48. З 10 карток з цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 вибирають навмання три. Яка ймовірність того, що ***а*)** у порядку вибору цифр утвориться число 347, ***б*)** можна буде скласти число 347?

1.49. У шухляді змішані 5 однакових кубиків. На всіх гранях кожного кубика написана одна з наступних літер: О, П, Р, С, Т. Знайти ймовірність того, що на вийнятих по одному і розташованих в одну лінію кубиках можна буде прочитати слово "СПОРТ"?

1.50. У шухляді змішані 6 однакових кубиків. На всіх гранях кожного кубика написана одна з наступних літер: М, О, О, О, Л, К. Знайти ймовірність того, що на вийнятих по одному і розташованих в одну лінію кубиках можна буде прочитати слово "МОЛОКО"?

1.51. У шухляді змішані 6 однакових кубиків. На всіх гранях кожного кубика написана одна з наступних літер: А, А, А, Н, Н, С. Знайти ймовірність того, що на вийнятих по одному і розташованих в одну лінію кубиках можна буде прочитати слово "АНАНАС"?

1.52. На п'ятьох картках написані літери К, М, Н, І, Т. Виймаються навмання 3 картки. Яка ймовірність того, що ***а*)** у порядку виходу карток утвориться слово "КІТ", ***б*)** з вийнятих карток можна скласти слово "КІТ"?

1.53. В академічній групі 25 студентів, з них 15 дівчат. Яка ймовірність того, що серед перших 6 студентів, які зайшли до аудиторії, буде 4 дівчини?

1.54. Купують одну картку гри "Спортлото", в якій граючому треба викреслити 6 чисел з 36. Яка ймовірність, що граючий викреслить 6 з 6 виграшних чисел?

1.55. Купують одну картку гри "Спортлото", в якій граючому треба викреслити 6 чисел з 36. Яка ймовірність, що граючий викреслить 3 з 6 виграшних чисел?

1.56. Купують одну картку гри "Спортлото", в якій граючому треба викреслити 6 чисел з 36. У випадку, якщо граючий викреслить 3, 4, 5 або 6 з 6 виграшних чисел, він одержує грошовий виграш. Яка ймовірність одержання грошового виграшу?

1.57. Десять чоловік сідають за круглим столом. Яка ймовірність того, що дві певні особи опиняться сидячими поруч?

1.58. Задумане двозначне число, цифри якого різні. Знайти ймовірність того, що задуманим опиниться число ***а*)** випадково назване, ***б*)** випадково назване з різними цифрами?

1.59. Дати визначення поняття "*елементарна подія*".

1.60. Дати визначення поняття "*простір подій*".

1.61. Дати визначення поняття "*випадкова подія*" як складової частини простору подій.

1.62. Які події (з погляду простору подій) називаються сприятливими до іншої події?

1.63. Дати визначення поняття "*неможлива подія*" з погляду простору подій.

1.64. Дати визначення поняття "*достовірна подія*" з погляду простору подій.

1.65. Дати визначення операції додавання двох подій.

1.66. Дати визначення операції множення двох подій.

1.67. В умовах експерименту , коли гральну кістку кидають тільки один раз, представити складну подію S – випадіння парного числа очок або кратного п'ятьом – через прості події A_i, де індекс i відповідає числу очок, що випадає.

1.68. В умовах експерименту , коли гральну кістку кидають 2 рази, представити складну подію S – випадіння рівного числа очок при першому і другому киданнях – через прості події A_i (випадіння i очок при першому киданні), B_i (випадіння i очок при другому киданні).

1.69. В умовах експерименту , коли гральну кістку кидають 3 рази, представити складну подію S – сума очок при трьох киданнях кратна 17 – через прості події A_i (випадіння i очок при першому киданні), B_i (випадіння i очок при другому киданні) i C_i (випадіння i очок при третьому киданні).

1.70. В умовах експерименту , коли гральну кістку кидають 3 рази, представити складну подію S – сума очок при трьох киданнях не менше 17 – через прості події A_i (випадіння i очок при першому киданні), B_i (випадіння i очок при другому киданні) i C_i (випадіння i очок при третьому киданні).

1.71. Кидають дві звичайні гральні кістки, що відрізняються тільки кольором: одна кістка – чорна, друга – біла. Спостерігаються числа очок на їхніх верхніх гранях. Побудувати простір подій, що відповідає даному експерименту. Знайти ймовірності подій: ***а)*** P(«*ч*»+«*б*» = 6); ***б)*** P(«*ч*»+«*б*» > 9); ***в)*** P(«*ч*»+«*б*» $\le$ 5). Тут «*ч*» – число очок на чорній кістці; «*б*» – на білій.

Розв'язання. Побудувати простір подій – це значить, встановити ***всі*** можливі елементарні події для даного експерименту. Задачі, в яких потрібно побудувати простір подій, вирішують або простим перерахуванням всіх елементарних подій, або побудовою таблиці, що наочно зображує вміст простору. В останньому випадку в клітинках таблиці записують пари цифр – числа очок, що випадають на верхніх гранях білої (перша цифра) і чорної (друга цифра) кісток. В умовах задачі шуканому просторові подій відповідає таблиця:

	***ч*1**	***ч*2**	***ч*3**	***ч*4**	***ч*5**	***ч*6**
***б*1**	1 : 1	1 : 2	1 : 3	1 : 4	1 : 5	1 : 6
***б*2**	2 : 1	2 : 2	2 : 3	2 : 4	2 : 5	2 : 6
***б*3**	3 : 1	3 : 2	3 : 3	3 : 4	3 : 5	3 : 6
***б*4**	4 : 1	4 : 2	4 : 3	4 : 4	4 : 5	4 : 6
***б*5**	5 : 1	5 : 2	5 : 3	5 : 4	5 : 5	5 : 6
***б*6**	6 : 1	6 : 2	6 : 3	6 : 4	6 : 5	6 : 6

Загальна кількість елементарних подій відповідає кількості клітинок, тобто $N = 6 * 6 = 36$.

Побудований простір подій дозволяє просто й наочно одержати відповіді на інші запитання задачі.

а) Для визначення ймовірності P(«*ч*» + «*б*» = 6) виділимо в таблиці простору подій клітинки, що відповідають елементарним подіям, сприятливим для випадіння суми очок, рівної 6:

	***ч*1**	***ч*2**	***ч*3**	***ч*4**	***ч*5**	***ч*6**
***б*1**	1 : 1	1 : 2	1 : 3	1 : 4	**1 : 5**	1 : 6
***б*2**	2 : 1	2 : 2	2 : 3	**2 : 4**	2 : 5	2 : 6
***б*3**	3 : 1	3 : 2	**3 : 3**	3 : 4	3 : 5	3 : 6
***б*4**	4 : 1	**4 : 2**	4 : 3	4 : 4	4 : 5	4 : 6
***б*5**	**5 : 1**	5 : 2	5 : 3	5 : 4	5 : 5	5 : 6
***б*6**	6 : 1	6 : 2	6 : 3	6 : 4	6 : 5	6 : 6

Кількість виділених клітинок дорівнює 5. Загальна кількість клітинок, як було зазначено вище, дорівнює 36. За класичною формулою маємо: P(«*ч*» + «б» = 6) = 5/36.

б) Для визначення ймовірності P(«*ч*» + «*б*» > 9) виділимо в таблиці простору подій клітинки, яким відповідають елементарні події, сприятливі для випадіння суми очок більшої ніж 9:

	***ч*1**	***ч*2**	***ч*3**	***ч*4**	***ч*5**	***ч*6**
***б*1**	1 : 1	1 : 2	1 : 3	1 : 4	1 : 5	1 : 6
***б*2**	2 : 1	2 : 2	2 : 3	2 : 4	2 : 5	2 : 6
***б*3**	3 : 1	3 : 2	3 : 3	3 : 4	3 : 5	3 : 6
***б*4**	4 : 1	4 : 2	4 : 3	4 : 4	4 : 5	**4 : 6**
***б*5**	5 : 1	5 : 2	5 : 3	5 : 4	**5 : 5**	**5 : 6**
***б*6**	6 : 1	6 : 2	6 : 3	**6 : 4**	**6 : 5**	**6 : 6**

Кількість виділених клітинок дорівнює 6. Загальна кількість клітинок – 36. За класичною формулою маємо: P(«*ч*» + «*б*» > 9) = 6/36.

в) Для визначення ймовірності P(«*ч*» + «*б*» ≤ 5) виділимо в таблиці простору подій клітинки, що відповідають елементарним подіям з умовою «*ч*» + «*б*» ≤ 5:

	***ч*1**	***ч*2**	***ч*3**	***ч*4**	***ч*5**	***ч*6**
***б*1**	**1 : 1**	**1 : 2**	**1 : 3**	**1 : 4**	1 : 5	1 : 6
***б*2**	**2 : 1**	**2 : 2**	**2 : 3**	2 : 4	2 : 5	2 : 6
***б*3**	**3 : 1**	**3 : 2**	3 : 3	3 : 4	3 : 5	3 : 6
***б*4**	**4 : 1**	4 : 2	4 : 3	4 : 4	4 : 5	4 : 6
***б*5**	5 : 1	5 : 2	5 : 3	5 : 4	5 : 5	5 : 6
***б*6**	6 : 1	6 : 2	6 : 3	6 : 4	6 : 5	6 : 6

Кількість виділених клітинок дорівнює 10. Загальна кількість клітинок – 36. За класичною формулою маємо: P(«*ч*» + «*б*» ≤ 5) = 10/36.

1.72. В умовах задачі **1.71** знайти наступні ймовірності: ***а*)** не випадання дубля; ***б)*** число очок на одній кістці в два рази більше, ніж число очок на іншій кістці.

1.73. У стародавній індійській грі «Тонг» два гравці синхронно показують один одному або один, або два, або три пальці на правій руці. Мається на увазі, що для кожного гравця однаково можна показати або один, або два, або три пальці. Побудувати простір подій, що відповідає результатам гри. Знайти ймовірності подій: ***а*)** загальна кількість показаних пальців – непарне число; ***б)*** загальна кількість показаних пальців – менша двох; ***в)*** загальна кількість показаних пальців – просте число.

1.74. В умовах задачі **1.73** побудувати простір подій, що відповідає результатам гри, і знайти ймовірності подій: ***а*)** принаймні, один гравець показав менше трьох пальців; ***б)*** перший гравець показав один палець за умови, що сумарна кількість показаних пальців менша або дорівнює чотирьом.

1.75. У хлопчика в кишені є чотири монети номіналом 1, 5, 10 і 25 копійок. Він виймає одну за одною дві монети. Побудувати відповідний простір подій. Знайти ймовірності подій: ***а*)** обидві монети номіналом менше 10; ***б)*** хлопчик вийняв менше 20 копійок.

1.76. В умовах задачі **1.75** знайти ймовірності подій: ***а*)** хлопчик вийняв менше 20 копійок або одна з монет номіналом менше 10; ***б)*** хлопчик вийняв менше 20 копійок, причому одна з монет номіналом менше 10.

1.77. Які властивості мають операції додавання і множення подій?

2. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ

2.1. Основні теореми теорії ймовірностей

2.1.1. Ймовірність суми подій

Основні теореми теорії ймовірностей дозволяють за відомими імовірностями простих подій визначати ймовірності більш складних подій. Тобто передбачається, що ймовірності всіх подій, на які розкладається складна подія, відомі.

Основні теореми теорії ймовірностей включають дві теореми:

- теорему про ймовірність суми двох подій;
- теорему про ймовірність добутку двох подій.

Сформулюємо і доведемо першу з них.

Теорема 2.1. Ймовірність суми двох подій A и B дорівнює сумі їх імовірностей за відрахуванням імовірності добутку цих же подій:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A*B). \tag{2.1}$$

Доведення. Нехай результати досліду утворюють повну групу n несумісних рівноможливих подій (рис.2.1). При цьому

- m з них сприятливі події A;
- k з них сприятливі події B;
- l з них сприятливі добутку подій $A*B$.

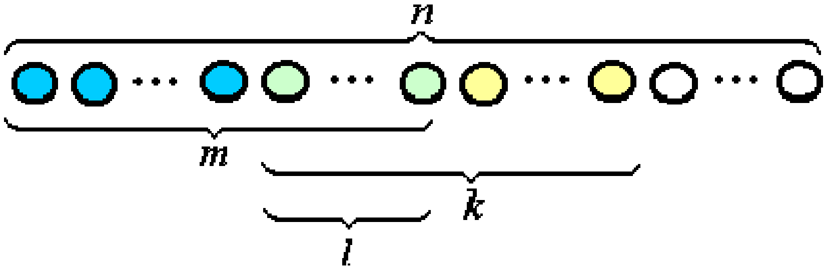


Рис.2.1

Тоді відповідно до класичної формули визначення ймовірності

$$P(A)=\frac{m}{n}; \qquad P(B)=\frac{k}{n}; \qquad P(A*B)=\frac{l}{n}.$$

Відповідно до тієї ж формули ймовірність появи події *A* або *B*

$$P(A+B)=\frac{m+k-l}{n}.$$

Перетворимо останню рівність:

$$P(A+B)=\frac{m+k-l}{n}=\frac{m}{n}+\frac{k}{n}-\frac{l}{n}= P(A) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A{*}B}),$$

що й треба було довести.

Наслідок теореми 2.1. Ймовірність суми двох несумісних подій *A* і *B* дорівнює сумі їх імовірностей.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) . \tag{2.2}$$

Наслідок очевидний, оскільки ймовірність добутку несумісних подій дорівнює неможливій події, а ймовірність неможливої події дорівнює нулю: $A*B=\varnothing$ і $P(\varnothing)=0$.

Наслідок легко узагальнюється на випадок кількох подій.

2.1.2. Повна група подій і протилежні події

Сума ймовірностей подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$, що складають ***повну групу***, дорівнює одиниці:

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1. \tag{2.3}$$

Доведемо це твердження. Нехай події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ утворюють повну групу в деякому просторі подій. Тоді, за визначенням повної групи, їх сума є достовірна подія:

$$A_1+A_2+\ldots+A_n=\mathbf{U}. \tag{2.4}$$

Події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ несумісні, тому до лівої частини отриманої рівності можна застосувати узагальнений наслідок теореми 2.1, тобто маємо:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n). \qquad (2.5)$$

Ймовірність достовірної події, що знаходиться в правій частині рівності (2.4), дорівнює одиниці: $P(U) = 1$. Співставляючи вирази (2.4) та (2.5), приходимо до формули для суми повної групи подій (2.3), що й треба було довести.

Визначення 2.1. Дві події A і $\bar{A}$ називаються ***протилежними***, якщо вони утворюють повну групу несумісних подій.

Приклади. При стрільбі по мішені дві події, що полягають відповідно у влученні й промаху, є протилежними. При киданні монети події, що полягають у випадінні "орла" і "решки", також є протилежними.

Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1\,. \qquad (2.6)$$

Відповідно до *визначення* 2.1 події A и $\bar{A}$ є несумісними і складають повну групу. Отже для них справедлива формула (2.3). Застосовуючи формулу (2.3) до подій A і $\bar{A}$, приходимо до виразу (2.6).

З (2.6) випливають рівності:

$$P(\bar{A}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A})\,; \qquad (2.7)$$

$$P(A) = 1 - \mathrm{P}(\bar{A})\,. \qquad (2.8)$$

2.1.3. Залежні й незалежні події

Визначення 2.2. Події A і B називаються ***незалежними***, якщо ймовірність події A не залежить від того, відбулася подія B або не відбулася.

Приклад 2.1. В умовах експерименту випадіння 1, 2, 3, 4, 5 або 6 очок – це події взаємно незалежні. Скільки б гральну кістку не кидали, ймовірності випадіння 1, 2, 3, 4, 5 або 6 очок не зміняться.

Приклад 2.2. З урни, що містить 3 червоні й 2 сині кулі, послідовно витягують навмання дві. Поява червоної кулі при першому і другому вийманнях – події залежні, оскільки ймовірність появи червоної кулі при другому вийманні буде залежати від того, яка куля була витягнута при першому вийманні. Так, якщо першою витягнутою кулею була червона, то ймовірність появи червоної кулі при другому вийманні дорівнює 2/4; якщо – синя, то – 3/4 (див. *приклад 2.3*).

2.1.4. Умовна ймовірність

Визначення 2.3. Для залежних подій A і B ймовірність події B, яка обчислена за умови, що подія A відбулася, називається ***умовною*** ймовірністю і позначається $P_A(B)$ або $P(B/A)$.

В умовах *прикладу 2.2* ймовірності появи червоної кулі при другому вийманні 2/4 і 3/4 – це умовні ймовірності. Причому ймовірність 2/4 обчислена за умови, що першою витягується червона куля, а ймовірність 3/4 – що синя.

Приклад 2.3. З урни, що містить 3 червоні й 2 сині кулі, послідовно витягують навмання дві кулі. Визначити ймовірності появи кулі кожного кольору при першому вийманні, а також умовні ймовірності появи куль кожного кольору при другому вийманні.

Розв'язання. Введемо позначення:

n – загальне число куль в урні;

m – число червоних куль в урні;

k – число синіх куль в урні;

A_i – подія, яка полягає в тому, що навмання витягнута i-а куля опиниться червоною, $i = 1,2$;

B_i – подія, яка полягає в тому, що навмання витягнута i-а куля опиниться синьою, $i = 1,2$;

$P(A_1)$ – ймовірність події A_1;

$P(B_1)$ – ймовірність події B_1;

$P(A_2/A_1)$ – умовна ймовірність події A_2 за умови, що відбулася A_1;

$P(A_2/B_1)$ – умовна ймовірність події A_2 за умови, що відбулася B_1;

$P(B_2/A_1)$ – умовна ймовірність події B_2 за умови, що відбулася A_1;

$P(B_2/B_1)$ – умовна ймовірність події B_2 за умови, що відбулася B_1.

Тоді відповідно до класичної формули визначення ймовірності (1.1) шукані ймовірності визначаться в такий спосіб:

$P(A_1)$=3/5, оскільки сприятливих виходів експерименту m=3 (число червоних куль в урні), а загальне число виходів n=5 (усього куль в урні);

$P(B_1)$=2/5, оскільки сприятливих виходів досліду m=2 (число синіх куль в урні), а загальне число виходів n=5 (усього куль в урні);

$P(A_2/A_1)$=2/4, оскільки сприятливих виходів експерименту m=2 (число червоних куль після виймання однієї червоної кулі), а загальне число виходів n=4 (усього куль в урні після першого виймання);

$P(A_2/B_1)$=3/4, оскільки сприятливих виходів експерименту m=3 (число червоних куль після виймання однієї синьої кулі), а загальне число виходів n=4 (усього куль в урні після першого виймання);

$P(B_2/A_1)$=2/4, оскільки сприятливих виходів експерименту m=2 (число синіх куль після виймання однієї червоної кулі), а загальне число виходів n=4 (усього куль в урні після першого виймання);

$P(B_2/B_1)$=1/4, оскільки сприятливих виходів експерименту m=1 (число синіх куль у результаті виймання однієї синьої кулі), а загальне число виходів n=4 (усього куль в урні після першого виймання).

2.1.5. Ймовірність добутку подій

Теорема 2.2. Ймовірність добутку двох подій A і B дорівнює ймовірності події A, помноженої на умовну ймовірність події B за умови, що подія А відбулася, або дорівнює ймовірності події B, помноженої на умовну ймовірність події A за умови, що подія В відбулася:

$$P(A*B) = P(A) * P_A(B) = P(B)*P_B(A) . \tag{2.9}$$

Доведення. Нехай результати експерименту складають повну групу несумісних рівноможливих подій (рис.2.1). При цьому

m з них сприятливі події A;

k з них сприятливі події B;

l з них сприятливі добутку подій $A*B$.

Тоді відповідно до класичної формули

$$P(A)=\frac{m}{n}; \qquad P(B)=\frac{k}{n}; \qquad P_A(B)=\frac{l}{m}; \qquad P_B(A)=\frac{l}{k} .$$

Відповідно до тієї ж формули ймовірність одночасної появи подій A і B

$$P(A*B)=\frac{l}{n} .$$

Перетворимо останню рівність:

$$P(A*B)=\frac{l}{n}=\begin{cases}\dfrac{l}{n}=\dfrac{l\cdot m}{n\cdot m}=\dfrac{m}{n}\cdot\dfrac{l}{m}=P(A)P_A(B);\\[2ex] \dfrac{l}{n}=\dfrac{l\cdot k}{n\cdot k}=\dfrac{k}{n}\cdot\dfrac{l}{k}=P(B)P_B(A).\end{cases}$$

Таким чином, теорему доведено.

Наслідок теореми 2.2. Ймовірність добутку двох незалежних подій A і B дорівнює добутку їх імовірностей

$$P(A*B) = P(A) * P(B) . \qquad (2.10)$$

Наслідок досить просто пояснюється, коли взяти до уваги, що для незалежних подій умовні ймовірності збігаються з безумовними: $P_B(A) = P(A)$; $P_A(B) = P(B)$.

Наслідок легко узагальнюється на випадок кількох подій.

Приклад 2.4. Стрілець робить три постріли по мішені. Ймовірність влучення в мішень при кожному пострілі однакова і дорівнює 0,9 . Знайти ймовірність того, що в мішені буде тільки дві пробоїни.

Розв'язання. Введемо позначення:

A_1 і $\bar{A}_1$ – відповідно влучення і промах при першому пострілі;

A_2 і $\bar{A}_2$ – відповідно влучення і промах при другому пострілі;

A_3 і $\bar{A}_3$ – відповідно влучення і промах при третьому пострілі.

Тоді подія A, яка полягає в тому, що після трьох пострілів у мішені буде тільки дві пробоїни, може наступити у випадку, якщо стрілець або влучить при першому і другому пострілах і промахнеться при третьому, або влучить при першому і третьому пострілах і промахнеться при другому, або влучить при другому і третьому пострілах і промахнеться при першому. З урахуванням введених позначень подію A можна розкласти через прості в такий спосіб:

$$A = A_1A_2\bar{A}_3 + A_1\bar{A}_2A_3 + \bar{A}_1A_2A_3 .$$

Оскільки доданки в наведеному розкладанні відповідають несумісним подіям, то ймовірність події A дорівнюватиме сумі ймовірностей цих подій (*наслідок теореми 2.1*):

$$P(A) = P(A_1A_2\bar{A}_3) + P(A_1\bar{A}_2A_3) + P(\bar{A}_1A_2A_3) .$$

Оскільки всі постріли є незалежними між собою, то кожний доданок в останньому виразі можна подати як добуток імовірностей простих подій (*наслідок теореми 2.2*)

$$P(A) = P(A_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) + P(A_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) + P(\bar{A}_1)P(A_2)P(A_3) .$$

Ймовірності $P(A_1)$, $P(A_2)$ і $P(A_3)$ за умовою дорівнюють 0,9 . Невідомі ймовірності $P(\bar{A}_1)$, $P(\bar{A}_2)$ і $P(\bar{A}_3)$ легко визначаються як імовірності протилежних подій: $P(\bar{A}_1) = 1–P(A_1)$; $P(\bar{A}_2) = 1– P(A_2)$; $P(\bar{A}_3) = 1– (A_3)$. Тобто усі вони дорівнюють 0,1 .

Підставляючи ймовірності простих подій в останнє розкладання ймовірності $P(A)$, одержимо шуканий результат $P(A) = 0{,}243$.

2.2. *Моделі надійності технічних систем*

2.2.1. Надійність технічних систем

Теорія ймовірностей відіграє першорядну роль у теорії надійності, надаючи їй зручний математичний апарат. Зокрема, розрахунок *надійності технічних систем* цілком базується на основних теоремах теорії ймовірностей і є вдалою ілюстрацією їх використання в інженерній практиці.

Визначення 2.4. Під ***надійністю технічної системи*** розуміється ймовірність її безвідмовної роботи за певний період часу *T*.

Основні теореми теорії ймовірностей дозволяють визначати ймовірність безвідмовної роботи системи за відомими ймовірностями безвідмовної роботи окремих її елементів. Іншими словами, основні теореми теорії ймовірностей дозволяють визначати надійність усього виробу за відомими надійностями складових його вузлів.

Елементи системи можуть різним способом об'єднуватися в систему. Залежно від способу об'єднання елементів розрізняють системи з

- *послідовним*;
- *паралельним*;
- *мостовим*;
- *змішаним* з'єднанням елементів.

Для одержання основних математичних моделей надійності технічних систем доведемо наступну теорему.

Теорема 2.3. Ймовірність появи хоча б одної з n незалежних сумісних подій $A_1, A_2, \dots, A_n$ дорівнює одиниці мінус добуток імовірностей непояви цих подій:

$$P(A) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A}_i), \tag{2.11}$$

де $P(A)$ – ймовірність появи хоча б одної з n незалежних сумісних подій;

$P(\overline{A}_i)$ – ймовірність непояви події A_i, $i=1,2,\dots,n$.

Доведення. Подія A, що полягає в появі хоча б одної з n сумісних подій, відбувається тоді, коли відбувається:

або одна з подій A_i , $i \in \{1,n\}$;

або дві з подій A_i ;

. . .

або всі n подій A_i .

Подія A не відбувається тільки в одному випадку, коли одночасно не відбуваються всі n подій A_i , тобто у випадку $\overline{A} = \overline{A}_1 * \overline{A}_2 * \ldots * \overline{A}_n$.

Оскільки всі події $\overline{A}_i$ між собою незалежні, то ймовірність події $\overline{A}$ визначиться відповідно до *наслідку теореми 2.2* : $P(\overline{A}) = \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A}_i)$.

Відповідно до формули (2.8), що зв'язує протилежні події, остаточно отримаємо $P(A) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A}_i)$. Теорему доведено.

Наслідок теореми 2.3. Якщо ймовірності появи сумісних незалежних подій A_i однакові й дорівнюють p, то ймовірність появи хоча б одної з них визначається за формулою

$$P(A) = 1 - q^n \, , \tag{2.12}$$

де q – ймовірність події $\overline{A}_i$, що дорівнює $(1 - p)$.

2.2.2. Послідовне з'єднання елементів

На рис.2.2 подана в загальному вигляді схема системи з послідовним з'єднанням елементів. Кожному i-му елементу поставлена у відповідність імовірність його безвідмовної роботи p_i. Таку ймовірність, як правило, беруть з даних технічного паспорта, що поставляється заводом-виробником разом з елементом (комплектуючим вузлом). Зараз і надалі будемо вважати, що система розбита на елементи так, що відмова будь-якого з них ні в якому разі не впливає на відмову інших елементів.

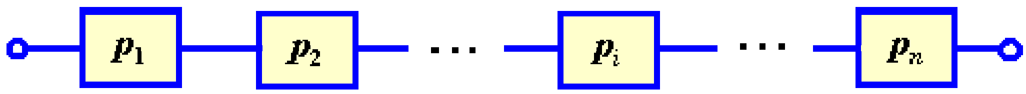


Рис.2.2

Відмова послідовної системи, наведеної на рис.2.2, наступає тоді, коли відмовляє хоча б один елемент. Прикладом такої системи може служити гірлянда послідовно з'єднаних лампочок. Вихід з ладу принаймні однієї лампочки тягне за собою вихід з ладу всієї гірлянди.

Введемо позначення. Нехай:

A – подія, що полягає у працездатності системи за деякий період часу T;

B_1 – подія, що полягає у працездатності 1-го елемента системи за той же період часу T;

B_2 – подія, що полягає у працездатності 2-го елемента протягом часу T;

. . .

B_i – подія, що полягає у працездатності i-го елемента протягом часу T;

. . .

B_n – подія, що полягає у працездатності n-го елемента протягом часу T.

Ймовірність події B_i дорівнює ймовірності безвідмовної роботи p_i.

Вся система працездатна тільки тоді, коли працездатні всі її елементи, тобто

$$A = B_1 * B_2 * \ldots * B_i * \ldots * B_n = \prod_{i=1}^{n} B_i .$$

Оскільки всі події B_i між собою незалежні, то ймовірність події A визначиться відповідно до *наслідку теореми 2.2* :

$$P(A) = \prod_{i=1}^{n} p_i . \tag{2.13}$$

Вираз (2.13) є математичною моделлю надійності системи послідовно з'єднаних елементів.

Аналіз моделі показує, що при $n \to \infty$, ймовірність безвідмовної роботи системи $P(A) \to 0$, оскільки всі співмножники $p_i < 1$. Це значить, що чим складніше система, тим нижче її надійність. Занадто складна система непрацездатна!

2.2.3. Паралельне з'єднання елементів

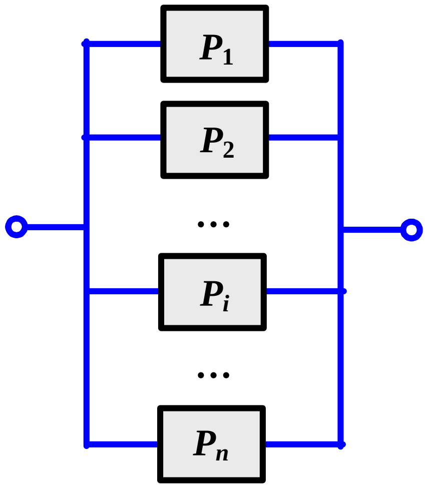


Рис.2.3

На рис.2.3 подана в загальному вигляді схема системи з паралельним з'єднанням елементів.

Кожному i-му елементу поставлена у відповідність імовірність його безвідмовної роботи p_i.

Відмова системи з паралельним з'єднанням елементів наступає тоді, коли відмовляють одночасно всі елементи. Прикладом такої системи може служити система світильників в аудиторії. При виході з ладу одного або декількох світильників інші продовжують освітлювати аудиторію.

Введемо позначення. Нехай:

A – подія, що полягає у працездатності всій системи за деякий період часу T;

B_1 – подія, що полягає у працездатності 1-го елемента системи за той же період часу T;

B_2 – подія, що полягає у працездатності 2-го елемента протягом часу T;

. . .

B_i – подія, що полягає у працездатності i-го елемента протягом часу T;

. . .

B_n – подія, що полягає у працездатності n-го елемента протягом часу T;

$\overline{A}, \overline{B}_1, \overline{B}_2, \ldots, \overline{B}_i, \ldots, \overline{B}_n$ – події, протилежні відповідно до подій A, B_1, B_2, ... , B_{i}, ..., B_{n}..

Тоді ймовірність події $\overline{B}_i$ згідно з формулою (2.7), що зв'язує протилежні події, дорівнює $(1 - p_i)$, і вся система буде непрацездатна тільки тоді, коли будуть непрацездатні всі її елементи, тобто $\overline{A} = \overline{B}_1 * \overline{B}_2 * \ldots * \overline{B}_i * \ldots * \overline{B}_n$. Оскільки всі події $\overline{B}_i$ між собою незалежні, то ймовірність події $\overline{A}$ визначається відповідно до *наслідку теореми 2.2* : $P(\overline{A}) = \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i)$.

Використовуючи знову формулу (2.8), одержимо остаточно

$$P(A) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i). \qquad (2.14)$$

Вираз (2.14) є математичною моделлю надійності системи паралельно з'єднаних елементів.

Аналіз моделі показує, що при $n \to \infty$, ймовірність безвідмовної роботи системи $P(A) \to 1$, оскільки добуток $\prod_{i=1}^{n} (1 - p_i) \to 0$.

Таким чином, введення в систему додаткових паралельних гілок сприяє підвищенню надійності системи. Так, для досягнення належної надійності функціонування інженерних мереж часто поруч з окремими трубопровідними ділянками з малою надійністю паралельно проводять додаткові ділянки, а для підвищення надійності роботи приладів вдаються до дублювання основних його вузлів.

2.2.4. Змішане з'єднання елементів

Реальні технічні системи, як правило, являють собою складні комбінації послідовних, паралельних і мостових з'єднань. На рис.2.4 наведений алгоритм розрахунку надійності складних систем зі змішаним з'єднанням елементів, поки тільки з послідовними і паралельними з'єднаннями. Розрахунок мостових з'єднань елементів буде розглянуто пізніше в підрозділі 3.1.3.

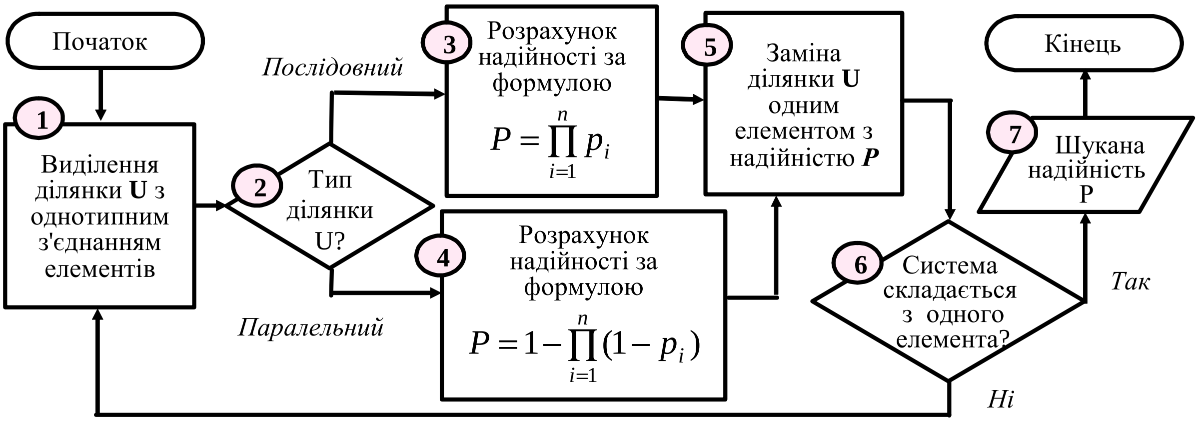


Рис.2.4 – Схема алгоритму обчислення надійності системи зі змішаним з'єднанням елементів

Як випливає з алгоритму на рис.2.4, обчислення змішаних систем є циклічним процесом заміни ділянок системи з однотипним з'єднанням елементів одним елементом з еквівалентною надійністю, що обчислюється за формулою (2.13) у випадку послідовного з'єднання або за формулою (2.14) у випадку паралельного з'єднання.

Циклічний процес заміни продовжується доти, доки схема системи не буде включати тільки один елемент. Обчислена еквівалентна надійність цього елемента і буде шуканою надійністю системи.

2.3. Практикум і запитання для самоконтролю

2.1. Які теореми теорії ймовірностей називають основними?

2.2. Як читається основна теорема про ймовірність суми двох подій?

2.3. У чому полягає наслідок основної теореми про ймовірність суми двох подій?

2.4. Які події називаються протилежними?

2.5. Чому дорівнює сума ймовірностей протилежних подій?

2.6. Які події є незалежними?

2.7. Дати визначення умовної ймовірності.

2.8. Як позначається умовна ймовірність?

2.9. Як читається основна теорема про ймовірність добутку двох подій?

2.10. У чому полягає наслідок основної теореми про ймовірність добутку двох подій?

2.11. Що розуміють під надійністю технічної системи?

2.12. Як підрозділяються технічні системи залежно від способу з'єднання їх елементів?

2.13. Чому дорівнює ймовірність появи хоча б одної з n незалежних сумісних подій?

2.14. Як визначається ймовірність безвідмовної роботи системи послідовно з'єднаних елементів?

2.15. Чому дорівнює ймовірність безвідмовної роботи системи з нескінченним числом послідовно з'єднаних елементів?

2.16. Для сигналізації про аварію встановлено два незалежно працюючі сигналізатори. Ймовірність того, що при аварії сигналізатор спрацює, дорівнює 0,95 для першого сигналізатора і 0,9 для другого. Знайти ймовірність того, що при аварії спрацює тільки один сигналізатор.

2.17. Ймовірність одного влучення в ціль при одному залпі з двох гармат дорівнює 0,38. Знайти ймовірність поразки цілі при одному пострілі першою з гармат, коли відомо, що для другої гармати ця ймовірність дорівнює 0,8.

2.18. Студент розшукує потрібну йому формулу в трьох довідниках. Ймовірність того, що формула міститься в першому, другому, третьому довідниках, відповідно дорівнює 0,6; 0,7; 0,8. Знайти ймовірність того, що формула міститься:

а) тільки в одному довіднику;

б) тільки в двох довідниках;

в) у всіх трьох довідниках;

г) у жодному довіднику.

2.19. Ймовірність того, що потрібна деталь знаходиться в першій, другій, третій, четвертій шухлядах, відповідно дорівнює 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Знайти ймовірність того, що деталь міститься:

а) не більше ніж у трьох шухлядах;

б) не менше чим у двох шухлядах.

2.20. Студент знає 20 з 25 питань програми. Знайти ймовірність того, що студент знає три питання, запропоновані йому екзаменатором.

2.21. Пристрій містить 2 незалежно працюючі елементи. Ймовірності відмови елементів відповідно дорівнюють 0,05 і 0,08. Знайти ймовірність відмови всього пристрою, якщо вона є наслідком відмови хоча б одного елемента.

2.22. Ймовірність хоча б одного влучення в ціль при чотирьох пострілах дорівнює 0,9984. Знайти ймовірність влучення в ціль при одному пострілі.

2.23. Як визначається ймовірність безвідмовної роботи системи паралельно з'єднаних елементів?

2.24. Чому дорівнює ймовірність безвідмовної роботи системи з нескінченним числом послідовно з'єднаних елементів?

2.25. Як здійснюють обчислення надійності систем із змішаним з'єднанням елементів?

2.26. Визначити надійність технічної системи, що зображена на рис.2.5, за відомими ймовірностями безвідмовної роботи окремих її елементів.

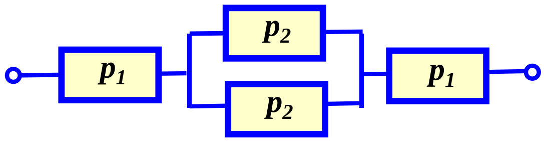


Рис.2.5

2.27. Визначити надійність технічної системи, що зображена на рис.2.6, за відомими ймовірностями безвідмовної роботи окремих її елементів.

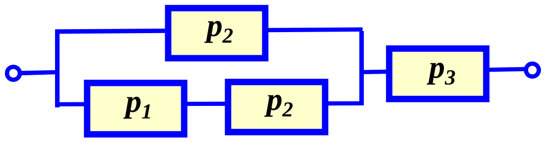


Рис.2.6

2.28. Визначити надійність технічної системи, що зображена на рис.2.7, за відомими ймовірностями безвідмовної роботи окремих її елементів.

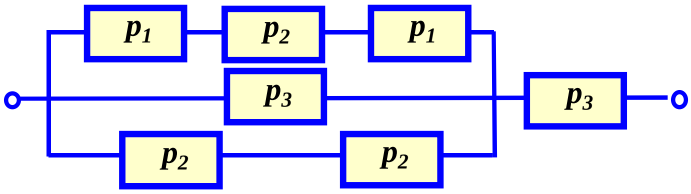


Рис.2.7

3. ЗАСТОСУВАННЯ ОСНОВНИХ ТЕОРЕМ

3.1. Алгебра гіпотез

3.1.1. Формула повної ймовірності

Формулу ***повної ймовірності*** використовують для визначення ***середньої*** ймовірності події A, що може відбутися тільки з однією з повної групи несумісних подій H_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. При цьому відомі ***апріорні*** ймовірності подій H_i і умовні ймовірності настання події A за умови, що відбулася та або інша подія H_i.

Події H_i прийнято називати ***гіпотезами***, тому що середня ймовірність події A визначається в момент, коли невідомо, яка з подій H_i відбудеться і спричинить настання події A.

На рис.3.1 подана графічна інтерпретація умовам і даним, при яких визначається середня ймовірність. Тут використовуються наступні позначення:

$P(A)$ – повна, або середня ймовірність події A (довга напівжирна лінія);

$P(H_i)$ – апріорна ймовірність гіпотези H_i (площа i-го прямокутника), $i = 1, 2, \ldots, n$;

$P(A/H_i)$ – умовна ймовірність настання події A за умови, що здійснилася та або інша гіпотеза H_i (коротка напівжирна лінія в i-му прямокутнику), $i = 1, 2, \ldots, n$.

Як показано на рис.3.1, сума ймовірностей гіпотез повинна дорівнювати одиниці (загальна площа всіх прямокутників), а середня ймовірність настання події A повинна бути більше (вище) самої маленької з умовних імовірностей $P(A/H_i)$ і менше (нижче) найбільшої, тобто знаходитися усередині прямокутника з пунктирним контуром.

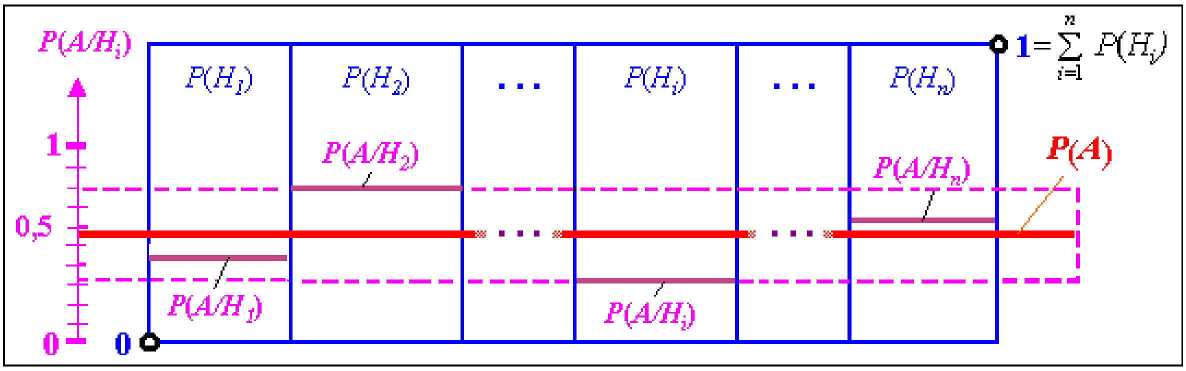


Рис.3.1

Теорема 3.1. Якщо деяка подія A може відбутися тільки з однією з повної групи несумісних подій (гіпотез) H_i (i = 1, 2, … , n) і відома апріорна ймовірність $P(H_i)$ кожної гіпотези й умовні ймовірності $P(A/H_i)$ події A за умови, що здійснилася та або інша гіпотеза, то повна, або середня ймовірність події A визначається за формулою

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i). \tag{3.1}$$

Доведення. Подія A може відбутися або разом з подією H_1, або з H_2, ... , або з H_n, тобто складна подія A може бути розкладена в такий спосіб:

$$A = H_1A + H_2A + ... + H_nA .$$

Покажемо, що з несумісності H_i випливає факт несумісності H_iA.

Якщо $H_{i*} H_j = \varnothing$, то $H_i*A* H_j*A= H_i* H_j*A*A= (H_i* H_j)*(A*A)= \varnothing*A=\varnothing$. Звідси ймовірність події A визначається відповідно до *наслідку теореми 2.1*, тобто

$$P(A) = P(H_1A) + P(H_2A) + ... + P(H_nA) .$$

Застосовуючи до кожного доданка останнього виразу *теорему 2.2*, одержимо

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + ... +P (H_n)P(A/H_n) = \sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i),$$

що і потрібно було довести.

Приклад 3.1. Завод випускає відеомагнітофони з гарантійним терміном експлуатації один рік. Відомо, що 20% продукції буде експлуатуватися в місцевості, яка знаходиться за полярним колом, 75% – у місцевості з помірним кліматом, 5% – у пустелі. Відомі також імовірності безвідмовної роботи відеомагнітофонів у кожному регіоні протягом гарантійного терміну: 0,9 – за полярним колом; 0.99 – у місцевості з помірним кліматом; 0,8 – у пустелі.

Треба визначити, який відсоток виробів треба випустити додатково до плану для заміни відеомагнітофонів, що вийдуть з ладу в період гарантійного терміну. При цьому вважається, що при заміні виробів останні не відмовляють.

Розв'язання. Введемо позначення:

A – безвідмовна робота відеомагнітофона;

H_1 – гіпотеза, яка полягає в тому, що виріб буде експлуатуватися за полярним колом;

H_2 – гіпотеза, яка полягає в тому, що виріб буде експлуатуватися в місцевості з помірним кліматом;

H_3 – гіпотеза, яка полягає в тому, що виріб буде експлуатуватися в пустелі.

Тоді ймовірності здійснення гіпотез, виходячи з умов прикладу, складуть:

– для гіпотези H_1 величину $P(H_1) = 20\% / 100\% = 0{,}2$;

– для гіпотези H_2 величину $P(H_2) = 75\% / 100\% = 0{,}75$;

– для гіпотези H_3 величину $P(H_3) = 5\% / 100\% = 0{,}05$,

а відповідні умовні ймовірності події A набудуть значень: $P(A/H_1) = 0{,}9$; $P(A/H_2) = 0{,}99$; $P(A/H_3) = 0{,}8$.

Додатково до плану треба випустити стільки виробів, скільки їх вийде з ладу у всіх регіонах. Шуканий додатковий відсоток виробів – це середня ймовірність відмови виробів по всіх регіонах, помножена на 100%.

Обчислимо спочатку середню ймовірність безвідмовної роботи виробу:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(A/H_i) \;=\; 0{,}2*0{,}9 + 0{,}75*0{,}99 + 0{,}05*0{,}8 = 0{,}9625 .$$

Відповідно до формули (2.7), що зв'язує протилежні події, середня ймовірність відмови виробів по всіх регіонах визначиться як

$$P(\bar{A}) = 1 – P(A) = 1 – 0{,}9625 = 0{,}0375 .$$

Шукане рішення: $P(\bar{A})$ * 100% = 3,75% .

3.1.2. Формула Байєса

Формула Байєса використовується в тих же умовах, що і формула повної ймовірності. Єдина відмінність полягає в тому, що подія A вже відбулася.

Формула Байеєа дозволяє визначати ***апостеріорні*** ймовірності гіпотез $P(Hj/A)$, j=1, 2, … , n , тобто умовні ймовірності гіпотез за умови, що подія A відбулася.

Теорема 3.2. Якщо деяка подія A може відбутися тільки з однією з повної групи несумісних подій (гіпотез) H_i (i = 1, 2, … , n) і відомі апріорні ймовірності гіпотез $P(H_i)$, умовні ймовірності $P(A/H_i)$ події A за умови, що здійснилася та або інша гіпотеза, а також відомо, що подія A відбулася, то апостеріорна ймовірність гіпотези H_j ($j\in\{1,\ 2,\ \dots\ ,\ n\}$) визначиться за формулою

$$P(H_j/A)=\frac{P(H_j)P(A/H_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i)} . \qquad (3.2)$$

Доведення. На підставі *теореми 2.2* про ймовірність добутку двох подій визначимо ймовірність одночасної появи подій A і H_j ($j\in\{1,2,\dots,n\}$) в одному експерименті:

$$P(A*H_j) = P(A)*P(H_j /A) = P(H_j)*P(A /H_j).$$

Другу частину отриманого співвідношення, тобто рівність

$$P(A)*P(H_j /A) = P(H_j)*P(A /H_j) ,$$

розв'яжемо відносно величини $P(H_j/A)$:

$$P\left(H_j/A\right)=\frac{P\left(H_j\right)P\left(A/H_j\right)}{P(A)} . \tag{3.3}$$

У знаменнику виразу (3.3) знаходиться повна ймовірність $P(A)$, що відповідно до *теореми 3.1* визначається сумою $\sum_{i=1}^{n}P\left(H_i\right)P\left(A/H_i\right)$. Підставляючи в (3.3) названу суму, остаточно одержимо $P\left(H_j/A\right)=\frac{P\left(H_j\right)P\left(A/H_j\right)}{P(A)}$. Теорему доведено.

Прикладне значення формули Байеса досить значне. Вона знаходить застосування в

- розпізнаванні образів для виявлення об'єктів за їх розмитим зображенням,
- технічній діагностиці для пошуку несправності,
- у медичній діагностиці для постановки діагнозу хворому,
- у радіолокаційній техніці для відділення сигналу від шуму і в багатьох інших випадках, коли необхідно виявити ймовірну причину (гіпотезу) появи події.

Формула Байєса, використовуючи інформацію про факт появи події, забезпечує корекцію апріорних імовірностей гіпотез, що дозволяє більш об'єктивно судити про причину, яка спонукала подію.

Приклад 3.2. На завод-виготовник надійшла рекламація на відеомагнітофон, що відмовив. Умови експлуатації магнітофона обговорені *в прикладі 3.1.* Треба визначити найімовірніший регіон, в якому він експлуатувався.

Розв'язання. За умовами задачі подією, що відбулася, є відмова відеомагнітофона. Якщо залишатися в рамках позначень, що мали місце при розгляданні *прикладу 3.1,* то ця подія позначається $\overline{A}$. Середня ймовірність цієї події $P(\overline{A})$ вже обчислена і складає 0,0375 .

Умовні ймовірності події $\overline{A}$ за умови, що відбулася та або інша гіпотеза, визначаються в такий спосіб:

$$P(\overline{A}/H_1) = 1 - P(A/H_1) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1 ;$$

$$P(\overline{A}/H_2) = 1 - P(A/H_2) = 1 - 0{,}99 = 0{,}01\ ;$$

$$P(\overline{A}/H_3) = 1 - P(A/H_3) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25\ .$$

Апостеріорні ймовірності гіпотез про регіон експлуатації відеомагнітофона, що відмовив, відповідно до формули Байєса, визначаються в такий спосіб:

для гіпотези H_1 (експлуатація за полярним колом)

$$P(H_1/\overline{A}) = \frac{P(H_1)P(\overline{A}/H_1)}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}2*0{,}1}{0{,}0375} = 0{,}533\ ;$$

для гіпотези H_2 (експлуатація в місцевості з помірним кліматом)

$$P(H_2/\overline{A}) = \frac{P(H_2)P(\overline{A}/H_2)}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}75*0{,}01}{0{,}0375} = 0{,}2\ ;$$

для гіпотези H_3 (експлуатація в пустелі)

$$P(H_3/\overline{A}) = \frac{P(H_3)P(\overline{A}/H_3)}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}05*0{,}2}{0{,}0375} = 0{,}2667\ .$$

Таким чином, найбільш імовірним регіоном, з якого надійшла рекламація, є місцевість за полярним колом. Дана гіпотеза має найбільшу апостеріорну ймовірність – 0,533.

3.1.3. Надійність систем з мостовим з'єднанням елементів

Формула повної ймовірності, також як і формула Байєса, має велике прикладне значення. Одним з її можливих практичних застосувань є обчислення надійності технічних систем з мостовим з'єднанням елементів. У цьому розділі буде розглянута методика обчислення мостових систем на прикладі простої системи з одним мостом. Обчислення надійності систем з великою кількістю мостів є складним інженерним завданням і в даному курсі не розглядається.

На рис.3.2 подана схема системи з одним мостом. Кожному плечу мостового з'єднання поставлена у відповідність імовірність його безвідмовної роботи p_i (i = 1,2,3,4) за деякий період часу T. Самому мосту поставлено у відповідність аналогічну ймовірність $p_м$.

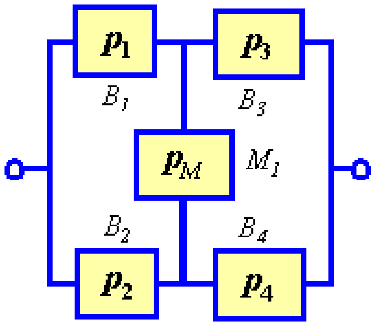


Рис.3.2

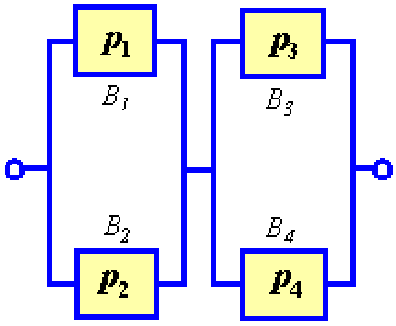


Рис.3.3

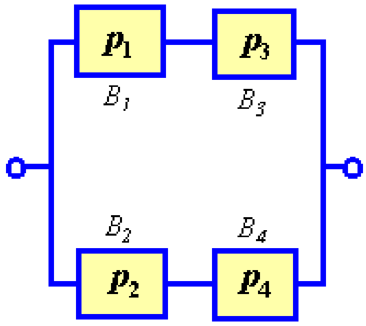


Рис.3.4

Введемо позначення:

A – подія, що полягає в працездатності системи за деякий період часу *T*;

H_1 – гіпотеза, що полягає в працездатності моста протягом часу *T*;

H_2 – гіпотеза, що полягає у виході з ладу моста протягом часу *T*.

Тоді ймовірність гіпотези H_1 відповідає величині $p_м$, а гіпотези H_2 – величині $(1–p_м)$.

Обчислимо умовні ймовірності події *A* у припущенні, що здійснилася та чи інша гіпотеза. Так, умовна ймовірність події *A* у припущенні, що здійснилася гіпотеза H_1, відповідає надійності змішаної системи, зображеної на рис.3.3, тобто

$$P(A/H_1) = [1-(1-p_1)(1-p_2)][1-(1-p_3)(1-p_4)]\ ,$$

а умовна ймовірність події *A* у припущенні, що здійснилася гіпотеза H_2, відповідає надійності змішаної системи, зображеної на рис.3.4, тобто

$$P(A/H_2) = [1-(1-p_1p_3)(1-p_2p_4)]\ .$$

Шукана ймовірність безвідмовної роботи системи, поданої на рис.3.2, дорівнює середній імовірності події *A*. Ця ймовірність відповідно до *теореми 3.1* визначається за формулою (3.1):

$$p(A)=\sum_{i=1}^{2}P(H_i)P(A/H_i)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)=$$

$$=p_м[1-(1-p_1)(1-p_2)]\,[1-(1-p_3)(1-p_4)]+(1-p_м)\,[1-(1-p_1p_3)(1-p_2p_4)]\ . \qquad (3.4)$$

При рівноважних плечах мостового з'єднання ($p_i = p$, $i = 1, 2, 3, 4$) формула (3.4) спрощується:

$$P(A) = p_M\left[1-(1-p)^2\right]^2 + (1-p_M)\left[1-\left(1-p^2\right)^2\right]. \qquad (3.5)$$

Вирази (3.4) і (3.5) є математичними моделями надійності для систем з одним мостовим з'єднанням елементів відповідно з нерівноважними і рівноважними плечами мостового з'єднання.

3.2. Повторення експерименту

3.2.1. Задачі на повторення незалежних експериментів

У практиці економістів і менеджерів часто виникають задачі, безпосередньо або побічно зв'язані з обчисленням імовірності складних подій при фіксованому числі повторення *незалежних експериментів* і відомої ймовірності настання деякої події A в одному експерименті.

Визначення 3.1. Експерименти називаються ***незалежними***, якщо ймовірність появи події *А* в кожному експерименті не залежить від того, з'явилася вона в попередніх експериментах чи ні.

До згаданих задач насамперед відносяться:

- визначення ймовірності настання події A рівно k разів у n незалежних випробуваннях;
- визначення ймовірності настання події A не менше k_1 разів і не більш k_2 разів у n незалежних випробуваннях;
- визначення найімовірнішого числа настання події A в n незалежних випробуваннях.

Всі ці задачі можуть бути вирішені за допомогою основних теорем теорії ймовірностей. Як приклад розглянемо одну з них.

Приклад 3.3. Нехай необхідно визначити ймовірність ураження цілі не менше двох разів при трьох пострілах, якщо ймовірність ураження цілі при одному пострілі дорівнює p.

Поставлена задача є окремим випадком другої задачі з тільки що перелічених. Її можна сформулювати іншим способом: треба визначити ймовірність ураження мішені не менше двох разів і не більше трьох разів при трьох пострілах, якщо ймовірність ураження мішені при одному пострілі дорівнює p.

Розв'язання прикладу 3.3. Складна, подія B, ймовірність якої потрібно визначити, може бути подана як сума менш складних:

$$B = C + D,$$

де C – подія, що полягає в ураженні мішені рівно 2 рази при трьох пострілах;

D – подія, що полягає в ураженні мішені рівно 3 рази при трьох пострілах.

У свою чергу, події C і D можуть бути розкладені на прості події:

$$C = A_1A_2\bar{A}_3 + A_1\bar{A}_2A_3 + \bar{A}_3A_2A_3\ ;$$
$$D = A_1A_2A_3\ ,$$

де A_i – подія, що полягає в ураженні мішені при i-му пострілі; $i = 1,2,3$;

$\bar{A}_i$ – подія, протилежна події A_i, $i = 1,2,3$.

Відповідно до *наслідку теореми 2.1* (C і D – несумісні події),

$$P(B) = P(C) + P(D) = P(\bar{A}_1A_2A_3) + P(A_1\bar{A}_2A_3) + P(A_1A_2\bar{A}_3) + P(A_1A_2A_3).$$

Оскільки виходи $\bar{A}_1A_2A_3$, $A_1\bar{A}_2A_3$ і $A_1A_2\bar{A}_3$ – рівноможливі події, то:

$$P(B) = 3*P(A_1A_2\bar{A}_3\ ) + 1*P(A_1A_2A_3),$$

або

$$P(B) = C_3^2*P(A_1A_2\bar{A}_3\ ) + C_3^3*P(A_1A_2A_3).$$

Відповідно до *наслідку теореми 2.2* (A_i – події незалежні, i = 1,2,3) і рівності одиниці суми ймовірностей протилежних подій, остаточно одержуємо:

$$P(B) = C_3^2p^2(1-p)^{3-2} + C_3^3p^3(1-p)^{3-3}\ . \tag{3.6}$$

Примітка. Шуканий результат в останньому виразі поданий, на перший погляд, у незручній формі. Однак, саме ця форма найбільше підходить для порівняння рішення, отриманого за допомогою основних теорем теорії ймовірностей, з рішенням за формулою Бернуллі, яку буде розглянуто в наступному підрозділі.

Як було сказано раніше, всі задачі на повторення незалежних експериментів можуть бути вирішені за допомогою основних теорем теорії ймовірностей. Але в умовах великого числа випробувань вирішення таких задач за допомогою основних теорем стає малоефективним через великі витрати часу на обчислювальні процедури. Щоб уникнути рутинних обчислень, у теорії ймовірності розроблені спеціальні математичні засоби, які й складають предмет подальшого розгляду.

3.2.2. Формула Бернуллі

У вирішенні останньої задачі за допомогою основних теорем теорії ймовірностей при пошуку ймовірності настання події A рівно 2 рази в трьох експериментах, тобто ймовірності $P(B)$, ми змушені були вдатися до повного перебору можливих виходів, що сприяють події B. Така процедура повного перебору виправдує себе тільки при невеликому числі випробувань. У разі великого числа випробувань, набагато ефективніше використовувати формулу Бернуллі, що призначена саме для цієї цілі.

Теорема 3.3 (*Теорема Бернуллі*). Якщо робиться n незалежних випробувань, у кожному з яких подія A з'являється з однаковою ймовірністю p, то ймовірність того, що в цих випробуваннях подія A відбудеться рівно k разів (байдуже, в якій послідовності) визначається за формулою

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} . \tag{3.7}$$

Теорема 3.3 приводиться без доказу, оскільки він примітивний і громіздкий. Читачеві пропонується довести теорему самостійно на основі використання комбінаторної формули обчислення числа сполучень.

Формула (3.7) відома як *формула Бернуллі*.

Рекомендується використовувати формулу Бернуллі при числі випробувань, що не перевищує числа 10.

Слід також пам'ятати, що формулу (3.7) може бути використано тільки в умовах *біноміального експерименту*, тобто при виконанні наступних вимог:

– експеримент повинен складатися з фіксованого числа випробувань (задане число n);
– кожне випробування приводить або до успіху, або до невдачі (до настання події A або $\overline{A}$);
– ймовірність успіху (невдачі) в усіх випробуваннях повинна бути однаковою;
– усі випробування повинні бути незалежними одне від одного.

3.2.3. Локальна теорема Лапласа

Використання формули Бернуллі при $n >> 1$, безумовно, краще прямого використання основних теорем теорії ймовірностей для тієї ж цілі. Однак наявність у формулі (3.7) числа сполучень робить її також незручною через трудомістке обчислення факторіалів. Зазначеного обчислення можна уникнути, якщо ймовірності $P_n(k)$ замінити їх оцінками.

Теорема 3.4 (*локальна теорема Лапласа*). Якщо робиться n незалежних випробувань, у кожному з який подія A з'являється з однаковою ймовірністю p, то ймовірність того, що в цих випробуваннях подія A відбудеться рівно k разів (байдуже, у якій послідовності) може бути оцінена (тим точніше, чим більше n) за формулою

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \varphi(x), \tag{3.8}$$

де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функція Гаусса;

$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$; $q = 1 - p$.

Функція Гаусса затабульована (*див. Додаток А*).

Це дозволяє уникнути складних обчислень за формулою (3.8), заміняючи їх простим обчисленням аргументу функції x. Функція Гаусса – парна функція, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Тому таблиця складена тільки для позитивних значень аргументу. Причому для діапазону значень аргументу від 0 до 4. При $|x| > 4$ функція Гаусса приймається рівною 0, тобто подія з шуканою ймовірністю вважається практично неможливою.

Приклад 3.4. Нехай імовірність відвідування студентом будь-якої лекції з курсу "Теорія ймовірностей" дорівнює $p = 0{,}9$. Визначити ймовірність відвідування студентом 12 лекцій з 16 запланованих у семестрі.

Розв'язання. Відповідно до *теореми 3.4* ймовірність відвідування студентом 12 лекцій з 16 при ймовірності відвідування кожної, рівної 0,9 , визначається за формулою (3.8):

$$P_{16}(12) \approx \frac{1}{\sqrt{16 \cdot 0{,}9 \cdot (1 - 0{,}9)}} \varphi(x), \tag{3.9}$$

де $x = \dfrac{12 - 16 \cdot 0{,}9}{\sqrt{16 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} = \dfrac{-2{,}4}{1{,}2} = -2$.

З погляду на парність функції Гаусса $\varphi(-2) = \varphi(2)$. За таблицею значень функції Гауса (*див. Додаток А*) знаходимо: $\varphi(2) = 0{,}0540$. Підставляючи знайдене значення функції в (3.9), остаточно маємо

$$P_{16}(12) \approx \frac{1}{\sqrt{16 \cdot 0{,}9 \cdot (1 - 0{,}9)}} \cdot 0{,}054 = \frac{1}{1{,}2} 0{,}054 = 0{,}045.$$

Таким чином, шукана ймовірність $P_{16}(12) = 0{,}045$.

3.2.4. Інтегральна теорема Лапласа

У *прикладі 3.3* було розглянуто задачу визначення появи події не менше двох разів і не більше трьох разів у трьох експериментах за допомогою основних теорем теорії ймовірностей. Як видно з результату (3.6), його можна отримати за допомогою формули Бернуллі (3.7), застосувавши її двічі. Крім того, задачу можна приблизно вирішити і за допомогою локальної теореми Лапласа, також застосувавши її двічі.

Вирішення задач розглянутого типу при $n >> 1$ можна значно прискорити, якщо вдатися до *інтегральної теореми Лапласа*.

Теорема 3.5 (*інтегральна теорема Лапласа*). Якщо робиться n незалежних випробувань, у кожному з який подія A з'являється з однаковою ймовірністю p, то ймовірність того, що в цих випробуваннях подія A відбудеться не менше k_1 разів і не більш k_2 разів (байдуже, в якій послідовності) може бути оцінена (тим точніше, чим більше n) за формулою

$$P_n(k_1, k_2) \approx \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{3.10}$$

де $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$; $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$; $q = 1 - p$;

$\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функція Лапласа.

Функція Лапласа затабульована (*див. Додаток В*). Це дозволяє уникнути інтегрування функції Гауса за формулою (3.10), замінюючи його обчисленням тільки аргументів функції x_1 і x_2. Функція Лапласа – непарна функція, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Тому таблиця складена тільки для позитивних значень аргументу. Діапазон значень аргументу в таблиці змінюється від 0 до 5. При $x > 5$ функція Лапласа приймається рівною 0,5.

Приклад 3.5. Нехай імовірність відвідування студентом будь-якої лекції з курсу "Теорія ймовірностей" дорівнює p = 0,9. Визначити ймовірність відвідування студентом не менше 12 лекцій з 16 запланованих у семестрі, якщо ймовірність його появи на будь-якій лекції складає 0,9.

Розв'язання. Відповідно до *теореми 3.5* імовірність відвідування студентом не менше 12 лекцій з 16 при ймовірності відвідування будь-якої з них 0,9 , визначається за формулою (3.10):

$$P_n(k_1,k_2)=P_{16}(12{,}16)\approx \Phi(x_2)-\Phi(x_1)\,, \tag{3.11}$$

де $x_1=\dfrac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\dfrac{12-16\cdot 0{,}9}{\sqrt{16\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1}}=\dfrac{-2{,}4}{1{,}2}=-2$;

$$x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{16-16\cdot 0{,}9}{\sqrt{16\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1}}=\frac{1{,}6}{1{,}2}=1{,}33\ .$$

З погляду на непарність функції Лапласа $\Phi(-2) = -\Phi(2)$. За таблицею значень функції Лапласа (*див. Додаток В*) знаходимо: $\Phi(1{,}33) = 0{,}1647$, $\Phi(2) = 0{,}4082$. Підставляючи знайдені значення функції в (3.11), остаточно одержуємо

$$P_{16}(12{,}16) = \Phi(1{,}33) - \Phi(-2) = \Phi(1{,}33) + \Phi(2) = 0{,}1647 + 0{,}4082 = 0{,}5729\ .$$

Таким чином, шукана ймовірність $P_{16}(12{,}16) = 0{,}5729$.

3.2.5. Найімовірніше число настання подій

Нехай робиться n незалежних експериментів, у кожному з яких може наступити подія A з однаковою ймовірністю p. У проведених експериментах подія A може не наступити жодного разу (k=0), один раз (k=1), два рази (k=2) і т.д. За допомогою формули Бернуллі при невеликих n можна визначити (або за допомогою локальної теореми Лапласа при великих n можна оцінити) ймовірність появи події A в n незалежних експериментах рівно k разів. У табл.3.1 наведені можливі значення величини k і відповідні ймовірності $P_n(k)$.

Таблиця 3.1

k	0	1	. . .	k_0	. . .	n
$P_n(k)$	$P_n(0)$	$P_n(1)$	. . .	$P_n(k_0)$	. . .	$P_n(k)$

Серед множини чисел k, $k\in\{0,n\}$, є, принаймні, одне число k_0, якому відповідає максимальна ймовірність $P_n(k)$.

Визначення 3.2. Найімовірнішим числом настання події A в n незалежних експериментах при однаковій імовірності настання події A в кожному з них називається число k_0, якому відповідає максимальна ймовірність $P_n(k)$, тобто число $k_0 = \arg\left(\max\limits_{k=\overline{1,n}}\{P(k)\}\right)$.

На практиці часто виникає необхідність визначити числа k_0. Щоб щоразу при визначенні цього числа не будувати таблицю, аналогічну табл.3.1, слід користуватися спеціально для цього призначеною подвійною нерівністю

$$np - q \le k_0 \le np + p\ , \tag{3.12}$$

де p – ймовірність настання події A при одному експерименті; $q = (1 - p)$.

Як користуватися подвійною нерівністю* (3.12) *?

Насамперед, відзначимо особливості цієї нерівності:

- ♦ значення правої частини перевищує значення лівої рівно на одиницю;
- ♦ k_0 – ціле число;
- ♦ всередині діапазону значень $[np–q;\ np+p]$ може знаходитися тільки одне ціле число, або два цілих числа можуть знаходитися на його границях.

Визначення k_0 здійснюють у наступній послідовності:

- спочатку визначають величину np, якщо np – ціле число, то $k_0 = np$;
- потім визначають величину $np+p$,
  - – якщо $(np+p)$ – ціле число, то існує два найімовірніших числа: $k_{01} = np+p$ і $k_{02} = k_{01}–1$;
  - – якщо $(np+p)$ – неціле число, то k_0 – ціле число в діапазоні $[np–q;\ np+p]$.

Приклад 3.6. Яке найімовірніше число лекцій, що відвідав студент з n=17 запланованих у семестрі, якщо ймовірність відвідування кожної лекції p=0,8?

Розв'язання. Обчислюємо np = 17*0,8 = 13,6 . Оскільки np – неціле число, то відповідно до вище викладеної методики використання подвійної нерівності (3.12) обчислюємо $np+p$ = 13,6+0,8 = 14,4. Оскільки ($np+p$) – неціле число, то відповідно до тієї ж методики k_0 належить діапазону [np-q; $np+p$], або дорівнює цілій частці величини $np+p$, тобто k_0 = 14 .

Приклад 3.7. Яке найімовірніше число випадіння 6 очок в умовах експерименту , якщо останній робиться 11 разів ?

Розв'язання. За умовою прикладу загальне число експериментів n = 11, ймовірність настання події в одному експерименті (випадіння шести очок) $p = \frac{1}{6}$. Як і в попередньому прикладі, вирішення здійснюємо відповідно до вище викладеної методики використання подвійної нерівності (3.12). Тобто спочатку обчислюємо $np = 11*\frac{1}{6} = \frac{11}{6}$. Далі, оскільки np – неціле число, обчислюємо $np+p = \frac{11}{6}+\frac{1}{6} = 2$. Оскільки ($np+p$) – ціле число, то існують 2 найімовірніших числа: $k_{01} = np+p = 2$ і $k_{02} = np–q = k_{01}–1 = 1$.

3.3. Практикум і запитання для самоконтролю

3.1. З якою метою використовують формулу повної ймовірності?

3.2. Навести формулу повної ймовірності.

3.3. У піраміді п'ять гвинтівок, три з яких обладнані оптичним прицілом. Ймовірність того, що стрілець уразить мішень при пострілі з гвинтівки з оптичним прицілом, дорівнює 0,95; для гвинтівки без оптичного прицілу – 0,7. Знайти ймовірність того, що мішень буде уражена, якщо стрілець зробить один постріл з навмання обраної гвинтівки.

3.4. У групі спортсменів 20 лижників, 6 ковзанярів і 4 фігуристи. Ймовірність виконати кваліфікаційну норму дорівнює: для лижника – 0,9; для ковзаняра – 0,8; для фігуриста – 0,75. Знайти ймовірність того, що навмання викликаний спортсмен виконає норму.

3.5. Яке призначення формули Байєса?

3.6. Сформулювати теорему Байєса.

3.7. Який зв'язок існує між формулою Байєса і формулою повної ймовірності?

3.8. Яке прикладне значення формули Байєса?

3.9. У піраміді десять гвинтівок, чотири з який обладнані оптичним прицілом. Ймовірність того, що стрілець уразить мішень при пострілі з гвинтівки з оптичним прицілом, дорівнює 0,95; для гвинтівки без оптичного прицілу – 0,8. Стрілець уразив мішень з навмання обраної гвинтівки. Що імовірніше: стрілець стріляв з гвинтівки з оптичним прицілом або без?

3.10. Є три набори деталей, з яких перший складається з двох партій деталей по 6 стандартних і 4 нестандартних у кожній партії; другий – з чотирьох партій по 2 стандартні і 8 нестандартних; третій – з трьох партій по 10 стандартних і 12 нестандартних. Знайти ймовірність того

***а*)** що навмання взята деталь з навмання обраної партії опиниться стандартною;

***б*)** що деталь було взято з першого набору, коли відомо, що витягнута деталь опинилася стандартною.

3.11. Батарея з трьох гармат зробила залп, при цьому 2 снаряди потрапили в ціль. Знайти ймовірність того, що перша гармата дала промах, якщо ймовірність влучення в ціль для першої гармати дорівнює 0,4; для другої – 0,3; для третьої – 0,5.

3.12. Які експерименти є незалежними?

3.13. Сформулювати теорему Бернуллі про повторення експериментів.

3.14. При якому числі незалежних експериментів рекомендується використовувати формулу Бернуллі?

3.15. Ймовірність одержання стипендії студентом дорівнює 0,8 . Яка ймовірність того, що студент буде одержувати стипендію в трьох з шести семестрів, що залишилися?

3.16. Яка ймовірність того, що в умовах експерименту  при восьмикратнім його повторенні просте число очок випаде рівно 5 разів?

3.17. Знайти ймовірність того, що подія A з'явиться не менше трьох разів у чотирьох незалежних випробуваннях, якщо ймовірність появи події A в кожному випробуванні $p = 0{,}4$.

3.18. Сформулювати локальну теорему Лапласа.

3.19. У чому принципова відмінність теореми Бернуллі від локальної теореми Лапласа?

3.20. Чи можна стверджувати, що функція Гаусса є симетричною щодо осі ординат?

3.21. Чому дорівнює функція Гаусса від аргументу –6,7?

3.22. Ймовірність ураження мішені при одному пострілі постійна і дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що при 100 пострілах мішень буде уражено рівно 75 разів.

3.23. Сформулювати інтегральну теорему Лапласа.

3.24. Яке призначення інтегральної теореми Лапласа?

3.25. Чи можна стверджувати, що функція Лпапласа має центральну симетрію відносно початку системи координат?

3.26. Чому дорівнює функція Лапласа від аргументу –6,7?

3.27. Ймовірність появи події в кожному з 100 незалежних випробувань постійна і дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться:

***а*)** не менше 75 разів і не більше 90 разів;

***б*)** не менше 75 разів;

***в*)** не більше 74 разів;

***г*)** не більше 75 разів.

3.28. Дати визначення найімовірнішого числа настання подій.

3.29. Навести подвійну нерівність для визначення найімовірнішого числа настання подій.

3.30. Які особливості є у подвійної нерівності для визначення найімовірнішого числа настання подій?

3.31. В якій послідовності рекомендується використовувати подвійну нерівність для визначення найімовірнішого числа настання подій?

3.32. Ймовірність влучення в ціль при одному пострілі дорівнює 0,2. Знайти найімовірніше число влучень в ціль:

***а*)** при 15 пострілах;

***б*)** при 9 пострілах;

***в*)** при 7 пострілах.

4. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

4.1. Форми задання дискретних випадкових величин

4.1.1. Основні визначення

"Випадкові величини" – це традиційно друга велика тема теорії ймовірностей, що ще більше наближає нас до світу випадкових явищ і процесів

Визначення 4.1. *Випадковою величиною* називають величину, яка в результаті експерименту приймає заздалегідь невідоме значення.

Приклади випадкових величин:

- кількість студентів, які присутні на лекції;
- кількість сонячних днів у році;
- вага осколка снаряда, що розірвався;
- час очікування громадського транспорту на зупинці;
- температура навколишнього середовища.

Випадкові величини за типом простору можливих значень діляться на *дискретні* й *неперервні*.

Визначення 4.2. *Дискретною* називають випадкову величину, можливі значення якої належать до лiченої множини – скінченної або нескінченної.

Визначення 4.3. *Неперервною* називають випадкову величину, можливі значення якої належать до неперервної множини – обмеженої або необмеженої.

Перші два приклади величин з наведених вище прикладів (кількість студентів і кількість сонячних днів) відносяться до дискретних випадкових величин, а три наступні – до неперервних. При цьому дискретні величини – скінченні й цілочисельні: перша змінюється від нуля до загальної кількості студентів на потоці, друга від 0 до 366 у високосному році або від 0 до 365 у невисокосному році. Перші дві неперервні величини (вага осколка і час очікування) обмежені з двох боків: вага осколка обмежена знизу нулем, а зверху вагою цілого снаряда, час очікування – знизу нулем, а зверху значенням максимального інтервалу часу, за яким рухається транспорт. Третя неперервна величина (температура навколишнього середовища) обмежена тільки знизу значенням абсолютного нуля $-273{,}2^{o}$C.

Для характеристики випадкової події досить знати ймовірність її настання в результаті експерименту. Для характеристики ж випадкової величини, що має більше двох можливих значень, цього недостатньо. Щоб мати вичерпну характеристику випадкової величини, треба знати її *закон розподілу*.

Визначення 4.4. *Закон розподілу* випадкової величини – це співвідношення, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними ймовірностями.

4.1.2. Форми задання закону розподілу дискретної випадкової величини

У теорії ймовірностей розрізняють декілька форм задання закону розподілу дискретної випадкової величини. На практиці використовують тільки дві найбільш корисні:

- ряд розподілу;
- інтегральна функція розподілу.

Розглянемо послідовно кожну форму задання закону розподілу дискретної випадкової величини.

4.1.2.1. Ряд розподілу

Ряд розподілу є найбільш простою і зрозумілою формою задання закону розподілу дискретної випадкової величини. Він являє собою таблицю, що складається з двох рядків. У першому рядку розташовуються в порядку зростання всі можливі значення дискретної випадкової величини, у другому – відповідні ймовірності.

Загальний вид ряду розподілу відповідає табл.4.1.

Таблиця 4.1. Закон розподілу у вигляді ряду розподілу

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_1	...	p_n

У результаті експерименту випадкова дискретна величина повинна прийняти одне з можливих значень. Оскільки всі можливі значення можна розглядати як повну групу несумісних подій, то сума відповідних імовірностей обов'язково повинна дорівнювати одиниці (умова нормування)

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \tag{4.1}$$

4.1.2.2. Інтегральна функція розподілу

Визначення 4.5. *Інтегральна функція розподілу* випадкової величини X – це функція $F(x)$, що при кожному значенні свого аргументу *x* чисельно дорівнює ймовірності того, що випадкова величина X опиниться менше, ніж значення аргументу x, тобто

$$F(x) = P\{X < x\}.$$

Інтегральна функція має три *властивості*:

- *1-а властивість.* Інтегральна функція від аргументу "мінус нескінченність", дорівнює нулю:

$$F(-\infty) = 0.$$

- *2-а властивість.* Інтегральна функція від аргументу "плюс нескінченність", дорівнює одиниці:

$$F(\infty) = 1.$$

- *3-я властивість*. Інтегральна функція – функція, що не зменшується: якщо $x_2 > x_1$, то $F(x_2) \geq F(x_1)$.

4.1.3. Приклад побудови закону розподілу

Розглянемо побудову закону розподілу у вигляді ряду розподілу й у вигляді інтегральної функції на конкретному прикладі.

Приклад 4.1. Побудувати закон розподілу випадкової величини X – кількість будинків, які здано в експлуатацію в запланований термін, з 3, що будуються. Ймовірність здачі в запланований термін для кожного будинку однакова і дорівнює 0,9.

Розв'язання. Випадкова величина X – кількість будинків, зданих в експлуатацію в запланований термін, може приймати значення 0, 1, 2 або 3. За умовами прикладу загальна кількість будинків (кількість експериментів) n = 3, ймовірність побудувати кожний будинок у запланований термін (настання події A в одному експерименті) p = 0,9. Тоді ймовірності p_i (i = 0,1,2,3) – це ймовірності того, що з 3 будинків у запланований термін буде здано рівно 0, 1, 2 або 3. Вони легко визначаються за допомогою формули Бернуллі:

$$p_0 = P(X = 0) = P_3(0) = C_3^0 p^0 (1-p)^{3-0} = 1 * 0{,}9^0 * (1-0{,}9)^{3-0} = 0{,}001 \ ;$$

$$p_1 = P(X = 1) = P_3(1) = C_3^1 p^1 (1-p)^{3-1} = 1 * 0{,}9^1 * (1-0{,}9)^{3-1} = 0{,}027 \ ;$$

$$p_2 = P(X = 2) = P_3(2) = C_3^2 p^2 (1-p)^{3-2} = 1 * 0{,}9^2 * (1-0{,}9)^{3-2} = 0{,}243 \ ;$$

$$p_3 = P(X = 3) = P_3(3) = C_3^3 p^3 (1-p)^{3-3} = 1 * 0{,}9^3 * (1-0{,}9)^{3-3} = 0{,}729 \ .$$

Отримані ймовірності дозволяють сформувати ряд розподілу (табл.4.2) і побудувати інтегральну функцію випадкової величини X (рис.4.1).

Таблиця 4.2. Ряд розподілу випадкової величини X в умовах *прикладу* 4.1

x_i	**0**	**1**	**2**	**3**
p_i	0,001	0,027	0,243	0,729

Слід звернути увагу на рівність одиниці суми значень імовірностей у другому рядку ряду розподілу. Така рівність обов'язкова. Вона знаходиться в повній відповідності з формулою (4.1) і служить критерієм слушності побудови закону розподілу.

Ряд розподілу випадкової величини з погляду на її табличну природу не має наочності. Крім того, за рядом розподілу важко визначати і порівняти ймовірності влучення випадкової величини в заданий діапазон значень. Цих недоліків позбавлена інтегральна функція розподілу випадкової величини, яка подана у вигляді графіка.

Перед тим як перейти до побудови графіка інтегральної функції, слід спочатку одержати її аналітичний запис, що складається з часткових записів для кожного з (n+1)-го діапазону, на які розбивається нескінченна числова ось можливими значеннями випадкової величини X, де n – загальна кількість можливих значень випадкової величини. В умовах прикладу $n = 4$ (можливі значення: 0, 1, 2 або 3). Отже кількість діапазонів дорівнює 5.

Аналітичний запис інтегральної функції випадкової величини X представимо у вигляді таблиці.

Таблиця 4.3. Таблично-аналітичне подання інтегральної функції розподілу випадкової величини X в умовах прикладу 4.1

Індекс діапазону *i*	**Діапазон $x^{(i)}$**	**Значення інтегральної функції $F(x^{(i)})$**
0	$x^{(0)} \leq 0$	$F(x^{(0)}) = P\{X<x^{(0)}\}= 0$
1	$0 < x^{(1)} \leq 1$	$F(x^{(1)}) = P\{X<x^{(1)}\}= P(X=0) = 0{,}001$
2	$1 < x^{(2)} \leq 2$	$F(x^{(2)}) = P\{X<x^{(2)}\}= P(X=0) + P(X=1) =$ $= 0{,}001 + 0{,}027 = 0{,}028$
3	$2 < x^{(3)} \leq 3$	$F(x^{(3)}) = P\{X<x^{(3)}\}= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) =$ $= 0{,}001 + 0{,}027 + 0{,}243 = 0{,}271$
4	$x^{(4)} < 3$	$F(x^{(4)}) = P\{X<x^{(4)}\} =$ $P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) =$ $= 0{,}001 + 0{,}027 + 0{,}243 + 0{,}729 = 1$

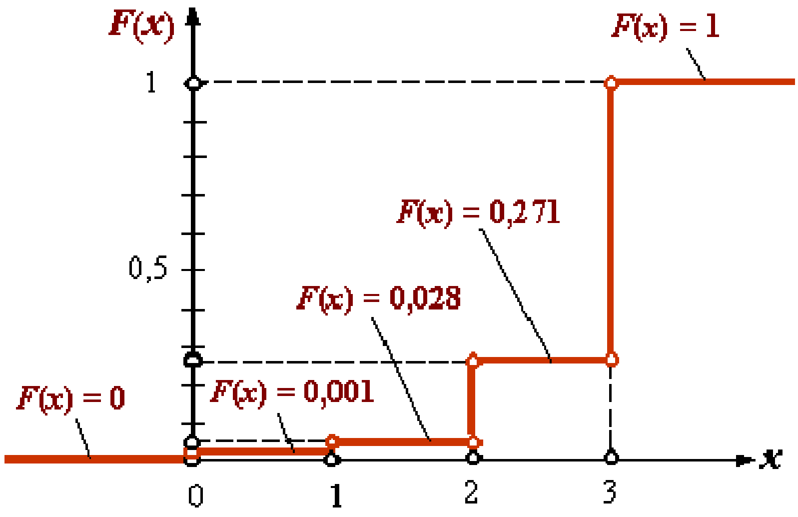


Рис.4.1

На рис.4.1 зображений графік інтегральної функції розподілу, що побудована відповідно до її таблично-аналітичного запису (див. табл.4.3). Як видно з рисунку, графіком функції дискретної випадкової величини є східчаста неперервна лінія, визначена на всій числовій осі x. Функція $F(x)$ змінюється від 0 до 1. Вона або зберігає своє значення в кожному i-му діапазоні зміни аргументу x, або стрибкоподібно збільшується в точках, що відповідають можливим значенням дискретної випадкової величини, тобто в точках, що розділяють діапазони.

4.1.4. Ймовірність влучення випадкової величини в заданий діапазон

На практиці при дослідженні випадкових величин часто виникає задача визначення ймовірності влучення значень деякої випадкової величини X у заданий діапазон $[a,b)$, тобто ймовірності $P\{a \le X < b\}$. Така ймовірність легко визначається за допомогою інтегральної функції.

Введемо позначення:

A – подія, яка полягає в тому, що $X < a$;

B – подія, яка полягає в тому, що $X < b$;

C – подія, яка полягає в тому, що $a \le X < b$.

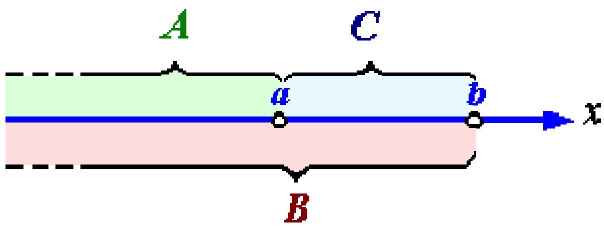


Рис.4.2

Складна випадкова подія B являє собою суму подій A і C (див. рис.4.2):

$$B = A + C.$$

Оскільки події A і C є несумісними, то

$$P(B) = P(A) + P(C)\ .$$

Звідки

$$P(C) = P(B) – P(A) = P\{X < b\} – P\{X < a\}\ .$$

За визначенням інтегральної функції $P\{X<b\} = F(b)$, $P\{X<a\} = F(a)$. Отже,

$$P(C) = F(b)\ –\ F(a).$$

Таким чином, імовірність влучення випадкової величини в заданий діапазон визначається за формулою

$$P\{a \le X < b\} = F(b) - F(a). \qquad (4.2)$$

Приклад 4.2. В умовах *прикладу 4.1* визначити ймовірність попадання випадкової величини X в діапазон [2,5; 3,5), тобто ймовірність $P\{2{,}5 \le X < 3{,}5\}$.

Розв'язання. У даному випадку ліва границя діапазону $a = 2{,}5$, а права $b = 3{,}5$. Підставляючи у формулу (4.2) значення аргументу інтегральної функції і обчислюючи значення інтегральної функції на границях заданого діапазону, одержуємо шуканий результат:

$$P\{2{,}5 \le X < 3{,}5\} = F(b) – F(a) =$$

$$=F(3{,}5)\,F\,(2{,}5) = 1– 0{,}271 = 0{,}729.$$

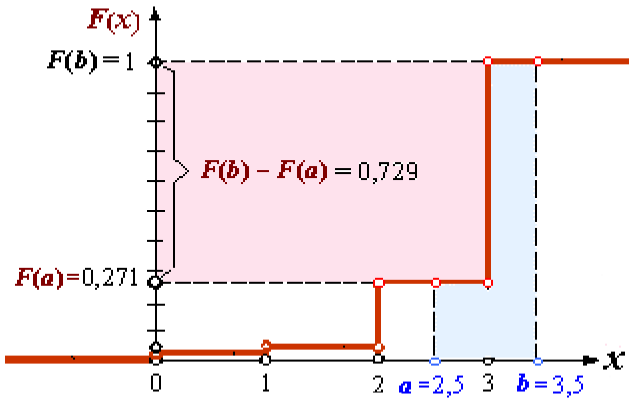


Рис.4.3

Шукана ймовірність і значення інтегральної функції $F(x)$ в умовах прикладу легко визначаються за графіком інтегральної функції (див. рис.4.3).

4.2. Форми задання неперервної випадкової величини та її властивості

У теорії ймовірностей розглядаються дві форми задання закону розподілу неперервної випадкової величини.

– інтегральна функція розподілу ймовірності;
– щільність розподілу ймовірності.

Обидві форми абсолютно рівноправні. Перша характеризує розподіл імовірностей залежно від діапазону значень неперервної випадкової величини, а друга – від конкретних значень.

Розглянемо послідовно кожну форму задання неперервної випадкової величини.

4.2.1. Інтегральна функція розподілу

Інтегральна функція розподілу ймовірності – це універсальна форма задання випадкових величин. З її допомогою можна задати закон розподілу як дискретної випадкової величини, так і неперервної.

Інтегральну функцію неперервної випадкової величини легко представити як графік інтегральної функції довільної дискретної випадкової величини, в якої кількість дискретних значень прагне до нескінченності. На рис.4.4 показано умовний процес перетворення інтегральної функції дискретної випадкової величини в інтегральну функцію неперервної величини при послідовному подрібненні діапазонів завдання функції навпіл, тобто при збільшенні кількості значень дискретної величини в 2 рази.

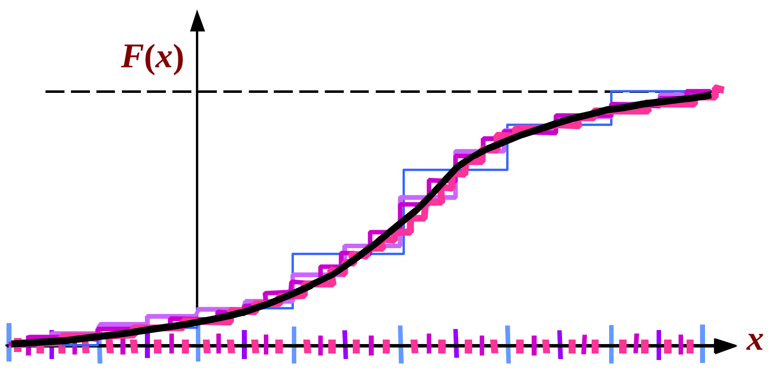


Рис.4.4

Інтегральна функція неперервної випадкової величини зберігає всі властивості інтегральної функції дискретної випадкової величини. Нагадаємо їх:

1-а властивість. Інтегральна функція від аргументу "мінус нескінченність" дорівнює нулю: $F(-\infty) = 0$.

2-а властивість. Інтегральна функція від аргументу "плюс нескінченність" дорівнює одиниці: $F(\infty) = 1$.

3-я властивість. Інтегральна функція – функція, що не зменшується: *якщо* $x_2 > x_1$, *то* $F(x_2) \geq F(x_1)$.

Для інтегральної функції неперервної випадкової величини також справедлива формула (4.2), що дозволяє обчислювати ймовірність влучення значень випадкової величини в заданий діапазон $[a,b)$. На рис.4.5 подана графічна інтепретація процесу визначення ймовірності $P\{a \leq X < b\}$.

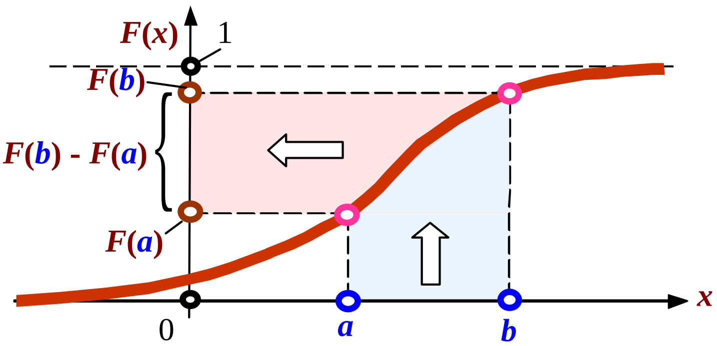


Рис.4.5

4.2.2. Ймовірність конкретного значення неперервної випадкової величини

Ймовірність будь-якого конкретного значення a неперервної випадкової величини X можна встановити за допомогою формули (4.2) – як імовірність попадання X в деякий діапазон $[a,b)$ при правій границі b, що прямує до значення a:

$$P(X = a) = \lim_{b \to a} P\{a \leq X < b\} = \lim_{b \to a} [F(b) - F(a)] = F(a) - F(a) = 0,$$

тобто

$$P(X{=}a) = 0. \qquad (4.3)$$

Рівність імовірності конкретного значення неперервної випадкової величини нулю (4.3) робить інтегральну функцію $F(x)$ безпорадною для характеристики окремих значень неперервної випадкової величини. Щоб дослідники могли порівнювати окремі значення неперервної випадкової величини з погляду їх імовірнісної появи в результаті експерименту, використовується інша форма задання закону розподілу цих величин – *щільність розподілу ймовірності*.

4.2.3. Щільність розподілу ймовірності

Інтегральна функція розподілу ймовірності за визначенням 4.5 дорівнює ймовірності влучення значень випадкової величини X в діапазон значень від мінус нескінченності до аргументу x, тобто інтегральна функція характеризує нескінченний інтервал значень $(-\infty, x)$. Інтегральна функція, відповідно до формули (4.2), також дозволяє встановити ймовірність влучення значень випадкової величини в заданий діапазон $[a,b)$, довільно обраний на числовій осі. Однак поряд з функцією, що характеризує діапазони значень неперервної випадкової величини, становить інтерес і функція, що здатна характеризувати кожне значення неперервної величини. Такою функцією є щільність розподілу ймовірності.

Функція щільності розподілу ймовірності $f(x)$ являє собою відношення ймовірності влучення неперервної випадкової величини в малий діапазон $[x, x+\Delta x)$, до довжини цього діапазону Δx:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{X \in [x, x+\Delta x]\}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{x \le X < (x+\Delta x)\}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{dF}{dx}.$$

Визначення 4.6. Щільністю розподілу ймовірності неперервної випадкової величини називається функція $f(x)$, що є першою похідною від інтегральної функції розподілу ймовірності $F(x)$:

$$f(x) = F'(x). \qquad (4.4)$$

Вираз (4.4) дозволяє при відомій інтегральній функції розподілу $F(x)$ неперервної випадкової неперервної величини визначити функцію щільності розподілу $f(x)$. Не менш важливим є зворотне перетворення

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt\,, \tag{4.5}$$

яке дозволяє при відомій функції щільності розподілу $f(t)$ одержати інтегральну функцію розподілу $F(x)$.

4.2.4. Властивості щільності розподілу ймовірності

Щільність розподілу $f(x)$ неперервної випадкової величини успадковує усі властивості інтегральної функції розподілу $F(x)$. При цьому дві перші властивості інтегральної функції $F(x)$ трансформуються в одну властивість щільності розподілу.

1-ша властивість. Інтеграл у нескінченних границях від щільності розподілу дорівнює одиниці (умова нормування)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1\,. \tag{4.6}$$

Обґрунтування властивості (4.6) одержують шляхом узяття визначеного інтеграла від щільності розподілу:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} = F(\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1\,.$$

Тут $F(-\infty) = 0$ є перша властивість інтегральної функції, а $F(\infty) = 1$– друга.

Геометричний зміст рівності (4.6) полягає в рівності одиниці площі, обмеженої графіком функції $f(x)$ і віссю абсцис.

2-га властивість. Щільність розподілу – функція невід’ємна

$$f(x) \geq 0\,. \tag{4.7}$$

Така властивість щільності розподілу ймовірності випливає з третьої властивості інтегральної функції: похідна від функції, що не зменшується, не може бути від'ємною.

4.2.5. Ймовірність влучення неперервної випадкової величини в заданий діапазон

Ймовірність влучення неперервної випадкової величини в заданий діапазон [a,b) може бути визначена за універсальною формулою (4.2):

$$P\{a \le X < b\} = F(b) - F(a)\ .$$

Альтернативну формулу для визначення цієї ж ймовірності можна одержати з (4.2) за допомогою зворотного перетворення (4.5):

$$P\{a \le X < b\} = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx\,.$$

Після скорочення подібних членів в останньому виразі остаточно одержуємо

$$P\{a \le X < b\} = \int_{a}^{b} f(x)dx\,. \tag{4.8}$$

На рис.4.6 подана графічна інтерпретація ймовірності влучення неперервної випадкової величини в діапазон [a,b). Чисельно значення такої ймовірності дорівнює заштрихованій площі.

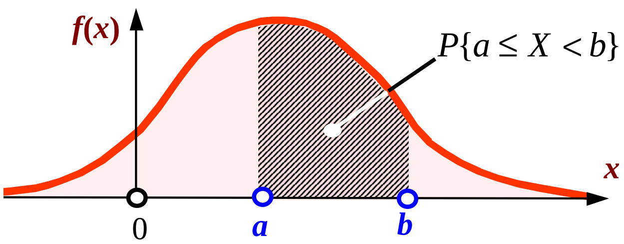


Рис.4.6

4.3. Числові характеристики випадкових величин

Числові характеристики випадкових величин кількісно визначають різноманітні властивості випадкових величин. Вони дозволяють проводити порівняльний аналіз випадкових величин, давати оцінку очікуваним результатам експерименту, знаходити зв'язок і визначати залежність між різними випадковими величинами і багато чого іншого. Досить часто знання числових характеристик дає дослідникам можливість розв'язувати задачі з випадковими величинами, не знаючи закону їх розподілу. Більше того, для багатьох стохастичних задачах метою їх розв'язання є визначення тієї або іншої числової характеристики.

Числові характеристики випадкових величин – це невипадкові величини. Кожна числова характеристика має тільки одне значення, що не залежить ні від результату конкретного експерименту, ні від кількості проведених експериментів.

Найбільш важливі числові характеристики є предметом розгляду цього підрозділу.

4.3.1. Характеристики положення випадкової величини на числовій осі

До числових характеристик положення випадкової величини на числовій осі відносяться:

- математичне сподівання;
- мода;
- медіана.

4.3.1.1. Математичне сподівання

Математичне сподівання випадкової величини є найбільш важливою її числовою характеристикою. Більша частина всіх числових характеристик випадкової величини безпосередньо зв'язана з її математичним сподіванням.

Математичне сподівання випадкової величини будемо позначати m_x або $M[X]$. Обидва позначення рівноправні. Надалі будемо користуватися обома позначеннями.

Визначення 4.7. ***Математичне сподівання*** – це середньовиважене за ймовірностями значення випадкової величини.

Математичне сподівання характеризує зміщення значень випадкової величини на числовій осі x відносно початку координат.

Математичне сподівання *дискретної* випадкової величини визначається за формулою

$$m_x = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \ , \tag{4.9}$$

де n – загальна кількість можливих значень випадкової величини; x_i і p_i – i-те можливе значення дискретної випадкової величини і відповідна ймовірність, $i = \overline{1,n}$.

Математичне сподівання неперервної випадкової величини визначається за формулою

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx \ , \qquad (4.10)$$

де x – неперервна випадкова величина; $f(x)$ – щільність розподілу величини x.

На рис.4.7 показані дві неперервні випадкові величини, задані у вигляді щільності розподілу з різними математичними сподіваннями ($m_{x2} > m_{x1}$).

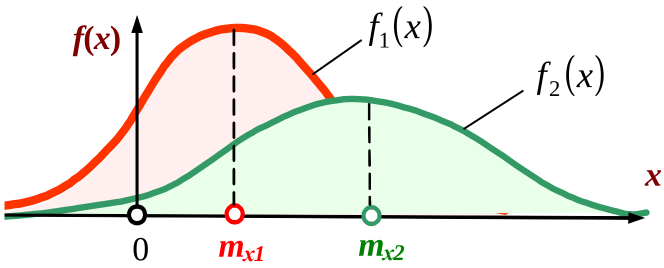


Рис.4.7

4.3.1.2. Мода

Для позначення найбільш імовірного значення випадкової величини використовують так звану *моду*. Позначається мода випадкової величини символом m або M. Надалі будемо користуватися позначенням m.

Визначення 4.8. Модою називають найбільш імовірне значення випадкової величини.

Мода m дискретної випадкової величини дорівнює такому її значенню x_m, якому відповідає максимальна ймовірність $p_m = \max\limits_{i=\overline{1,n}}\{p_i\}$.

Мода m неперервної випадкової величини дорівнює такому значенню аргументу x_m функції щільності розподілу $f(x)$, при якому $f(x_m) = \max\limits_{x \in R^1} f(x)$

На рис.4.8 показана мода неперервної унімодальної (з однією модою) випадкової величини, заданої щільністю розподілу.

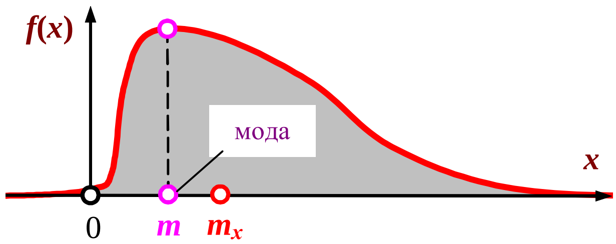


Рис.4.8

Крім унімодальних розподілів випадкових величин, розрізняють *полімодальні* (рис.4.9,*а*), *антимодальні* (рис.4.9,*б)* й *безмодальні* (рис.4.9,*в)*.

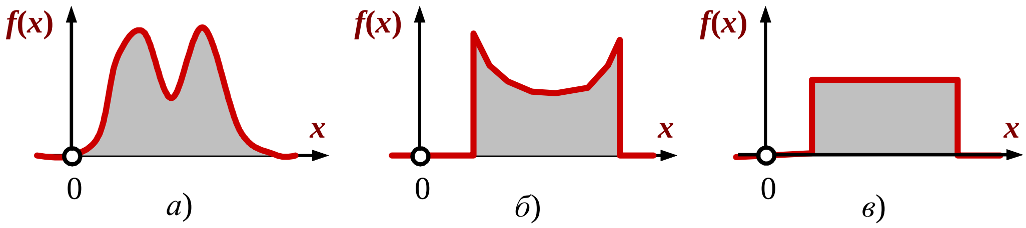


Рис.4.9

4.3.1.3. Медіана

Неперервні випадкові величини, крім математичного сподівання m_x і моди m, мають ще одну характеристику положення на числовій осі – *медіану*. Ця характеристика позначається як Me.

Визначення 4.9. Медіаною називають таке значення Me випадкової величини, для якого справедлива рівність $P\{X < Me\} = P\{X > Me\}$.

Перпендикуляр до числової осі, що проходить через медіану, поділяє площу, обмежену графіком щільності розподілу $f(x)$ і числовою віссю x, на дві рівні частини по 0,5 (рис.4.10).

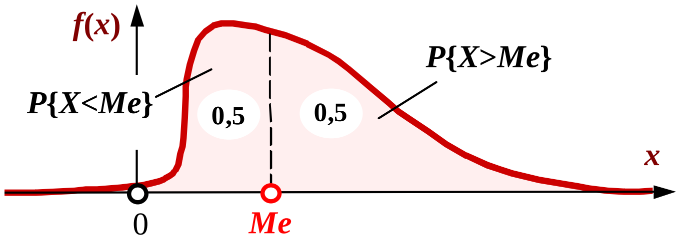


Рис.4.10

Для симетричного унімодального закону розподілу випадкової величини значення математичного сподівання, моди і медіани збігаються.

4.3.2. Моменти випадкових величин

Для характеристики різних властивостей випадкових величин використовують початкові й центральні моменти.

4.3.2.1. Початкові моменти

Визначення 4.10. ***Початковим моментом k-го порядку α_k*** називають математичне сподівання k–го степеня випадкової величини $\alpha_k = M\left[X^k\right]$.

Для дискретної випадкової величини k–й початковий момент визначається за формулою

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i \quad . \tag{4.11}$$

Для неперервної випадкової величини k–й початковий момент визначається за формулою

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\, dx \,. \tag{4.12}$$

4.3.2.2. Центральні моменти

Визначення 4.11. Відхилення випадкової величини від математичного сподівання $(X–m_x)$ називають ***центрованою випадковою величиною***.

Визначення 4.12. ***Центральним моментом s-го порядку μ_s*** називають математичне сподівання s-го степеня центрованої випадкової величини $\mu_s = M[(X–m_x)^S]$.

Для дискретної випадкової величини s–й центральний момент визначається за формулою

$$\mu_s = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - m_x\right)^s p_i . \tag{4.13}$$

Для неперервної випадкової величини s–й центральний момент визначається за формулою

$$\mu_s = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - m_x\right)^s f\left(x\right) dx . \tag{4.14}$$

4.3.3. Властивості моментів випадкових величин

Особливої уваги заслуговують властивості початкових і центральних моментів першого і другого порядків. Розглянемо кожну з цих властивостей.

4.3.3.1. Перший початковий момент

Початковий момент 1-го порядку α_1 випадкової величини являє собою її математичне сподівання: $\alpha_1 = M[X^1] = m_x$.

4.3.3.2. Перший центральний момент

Центральний момент 1-го порядку μ_1 будь-якої випадкової величини завжди дорівнює нулю. Наступні перетворення першого початкового моменту дискретної випадкової величини підтверджують сказане:

$$\mu_1 = M\left[(X - m_x)^1\right] = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i - \sum_{i=1}^{n} m_x p_i = m_x - m_x \sum_{i=1}^{n} p_i = m_x - m_x = 0 \ .$$

Аналогічний результат дають перетворення для неперервної випадкової величини:

$$\mu_1 = M\left[(X - m_x)^1\right] = \int_{-\infty}^{\infty}(x - m_x) f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx - \int_{-\infty}^{\infty} m_x f(x)\, dx =$$

$$= m_x - m_x \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = m_x - m_x = 0 \, .$$

Перший центральний момент на практиці не використовується, оскільки нічого характеризувати не може.

4.3.3.3. Другий початковий момент

Початковий момент 2-го порядку α_2 випадкові величини характеризує ступінь відхилення випадкової величини навколо її математичного сподівання, а також зміщення випадкової величини на числовій осі відносно початку координат.

Другий початковий момент дискретної випадкової величини визначається за формулою

$$\alpha_2 = M[X^2] = \sum_{i-1}^{n} x_i^2 p_i \ . \qquad (4.15)$$

Другий початковий момент неперервної випадкової величини визначається за формулою

$$\alpha_2 = M[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx \ . \qquad (4.16)$$

З погляду на те, що другий початковий момент характеризує відразу дві властивості випадкової величини, він як самостійна числова характеристика не використовується. Проте, він має велике значення для визначення інших числових характеристик, про що мова йтиме в підрозділі 4.3.3.5.

4.3.3.4. Другий центральний момент

Центральний момент 2-го порядку μ_2 характеризує ступінь відхилення випадкової величини навколо її математичного сподівання. Ця числова характеристика має ще іншу назву – *дисперсія*. Дисперсія – більш поширений термін, що позначається як D_x .

Оскільки дисперсія характеризує тільки відхилення випадкової величини, вона в порівнянні з другим початковим моментом є більш важливою числовою характеристикою.

Дисперсія дискретної випадкової величини обчислюється за формулою

$$D_x = \mu_2 = M\left[(X - m_x)^2\right] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 p_i \ . \qquad (4.17)$$

Дисперсія неперервної випадкової величини обчислюється за формулою

$$D_x = \mu_2 = M\left[(X - m_x)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x)\, dx \ . \qquad (4.18)$$

На рис.4.11 показані дві неперервні випадкові величини, задані у вигляді щільності розподілу з однаковими математичними сподіваннями ($m_{x2} = m_{x1}$) і різними дисперсіями ($D_{x2} > D_{x1}$).

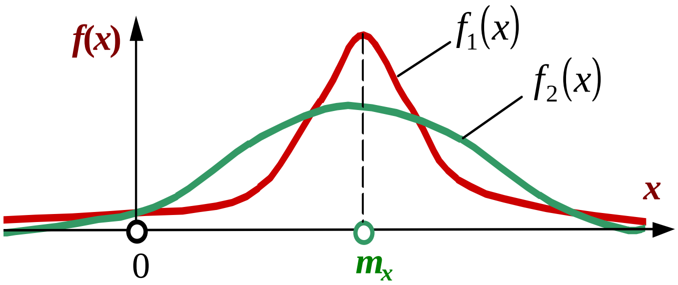


Рис.4.11

4.3.3.5. Зв'язок дисперсії з початковими моментами

Визначення дисперсії D_x для неперервних випадкових величин зв'язано з трудомісткими обчисленнями визначених інтегралів. На практиці дисперсію обчислюють за допомогою другого початкового моменту α_2 і математичного сподівання (першого початкового моменту)

m_x. Наступні математичні перетворення встановлюють зв'язок дисперсії з початковими моментами:

$$D_x = M\left[(X-m_x)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx + 2m_x\int_{-\infty}^{\infty}x f(x)dx + m_x{}^2\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$$

.

В отриманому виразі перший інтеграл дорівнює другому початковому моменту: $\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx = \alpha_2$; другий інтеграл – математичному сподіванню: $\int_{-\infty}^{\infty}x f(x)dx = m_x$; третій – одиниці (1-ша властивість щільності розподілу): $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx = 1$. Замінюючи інтеграли зазначеними виразами, одержимо $D_x = \alpha_2 - 2m_x^2 + m_x^2 = \alpha_2 - m_x^2$.

Таким чином, для обчислення дисперсії випадкових величин використовують формулу

$$D_x = \alpha_2 - m_x^2 \ . \qquad (4.19)$$

4.3.4. Середнє квадратичне відхилення

Дисперсія вимірюється у квадратних одиницях у порівнянні з одиницями виміру самої випадкової величини. Розбіжність в одиницях виміру може заподіяти незручності при аналізі дисперсійних властивостей випадкової величини. Це пов'язано з тим, що рядовому досліднику простіше порівнювати лінійні величини. Щоб одиниці виміру числової характеристики відхилення випадкової величини привести до лінійних, замість дисперсії використовують *середнє квадратичне відхилення* .

Визначення 4.13. ***Середнє квадратичне відхилення*** являє собою квадратний корінь з дисперсії

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} \ . \qquad (4.20)$$

Помилка виміру є середнє квадратичне відхилення вимірюваної величини від її дійсного значення.

4.3.5. Моменти високих порядків

Для аналізу випадкових величин мають значення і моменти більш високих порядків. Особливої уваги заслуговують третій і четвертий центральні моменти.

4.3.5.1. Третій центральний момент і коефіцієнт асиметрії

Третій центральний момент характеризує ступінь відхилення випадкової величини навколо математичного сподівання, а також ступінь асиметрії її закону розподілу.

Третій центральний момент дискретної випадкової величини обчислюється за формулою

$$\mu_3 = M\left[(X - m_x)^3\right] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^3 p_i \ . \qquad (4.21)$$

Третій центральний момент неперервної випадкової величини обчислюється за формулою

$$\mu_3 = M\left[(X - m_x)^3\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^3 f(x)\, dx \ . \qquad (4.22)$$

У випадку симетричного закону розподілу $\mu_3 = 0$.

Для характеристики тільки ступеня асиметрії використовується коефіцієнт асиметрії $S = \dfrac{\mu_3}{\sigma_x^3}$. У випадку симетричного закону розподілу коефіцієнт асиметрії також дорівнює нулю.

На рис.4.12 показані дві неперервні випадкові величини, задані у вигляді щільності розподілу, з різними за знаком коефіцієнтами асиметрії.

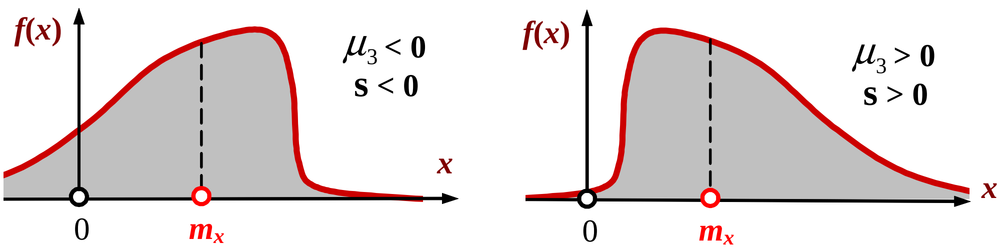


Рис.4.12

4.3.5.2. Четвертий центральний момент і величина ексцес

Четвертий центральний момент характеризує ступінь відхилення випадкової величини навколо математичного сподівання, а також ступінь гостровершинності її закону розподілу.

Четвертий центральний момент дискретної випадкової величини обчислюється за формулою

$$\mu_4 = M\left[(X-m_x)^4\right] = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^4 p_i \ . \qquad (4.23)$$

Четвертий центральний момент неперервної випадкової величини обчислюється за формулою

$$\mu_4 = M\left[(X-m_x)^4\right] = \int_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)^4 f(x)\,dx \ . \qquad (4.24)$$

Для характеристики тільки ступеня гостровершинності закону розподілу використовується величина ексцес $E = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3$. У разі *нормального* закону розподілу випадкової величини ексцес дорівнює нулю (E = 0). Більш докладно нормальний закон розподілу буде розглянутий у підрозділі 5.2.3.

На рис.4.13 показані три випадкові неперервні величини, задані у вигляді щільності розподілу, з різними величинами E. При цьому перша випадкова величина розподілена за нормальним законом з E_1 = 0, друга – з $E_2 > 0$, третя – з $E_3 < 0$.

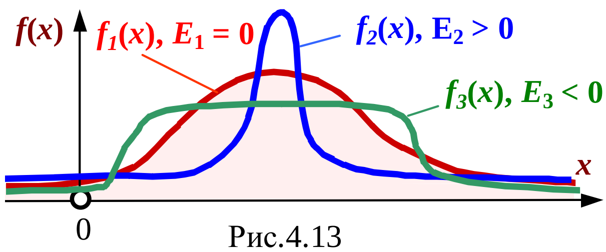


Рис.4.13

4.4. Практикум і запитання для самоконтролю

4.1. Яку величину називають випадковою?

4.2. Які випадкові величини називають дискретними?

4.3. Які випадкові величини називають неперервними?

4.4. Дайте визначення закону розподілу випадкової величини.

4.5. Які існують форми задання закону розподілу дискретної випадкової величини?

4.6. Що собою являє ряд розподілу дискретної випадкової величини?

4.7. Скласти ряд розподілу дискретної випадкової величини X – кількості появ «орла» при двох киданнях монети.

4.8. У партії з 10 деталей є 8 стандартних. Навмання відібрані 2 деталі. Скласти ряд розподілу для випадкової величини X – кількості стандартних деталей серед відібраних.

4.9. Дати визначення інтегральної функції розподілу випадкової величини.

4.10. Які властивості має інтегральна функція розподілу?

4.11. Робиться один експеримент, у результаті якого може з'явитися подія A; ймовірність появи події A дорівнює p. Розглядається випадкова величина X, рівна одиниці, якщо подія A відбувається, і нулю, якщо не відбувається (число появ події A в даному експерименті). Побудувати ряд розподілу випадкової величини X та її інтегральну функцію розподілу.

4.12. Навести формулу визначення ймовірності влучення випадкової величини в заданий діапазон за допомогою інтегральної функції розподілу.

4.13. Які існують форми задання закону розподілу неперервної випадкової величини?

4.14. У чому полягає основна відмінність інтегральної функції дискретної випадкової величини від інтегральної функції неперервної випадкової величини?

4.15. Чому дорівнює ймовірність конкретного значення неперервної випадкової величини?

4.16. Дати визначення функції щільності розподілу ймовірності.

4.17. Навести формулу зворотного перетворення, що дозволяє за відомою щільністю розподілу одержати інтегральну функцію розподілу.

4.18. У чому полягає перша властивість щільності розподілу?

4.19. У чому полягає друга властивість щільності розподілу?

4.20. Навести формулу визначення ймовірності влучення неперервної випадкової величини в заданий діапазон значень за допомогою функції щільності розподілу.

4.21. Дати геометричну інтерпретацію ймовірності влучення неперервної випадкової величини на задану ділянку числової осі.

4.22. Які числові характеристики випадкової величини визначають її положення на числовій осі?

4.23. Дати визначення математичного сподівання випадкової величини.

4.24. Що характеризує математичне сподівання випадкової величини?

4.25. Навести визначальну формулу математичного сподівання для дискретної випадкової величини.

4.26. Навести визначальну формулу математичного сподівання для неперервної випадкової величини.

4.27. Дати визначення для моди випадкової величини.

4.28. Дати визначення для медіани випадкової величини.

4.29. Для симетричного унімодального закону розподілу випадкової величини значення математичного сподівання, моди і медіани збігаються. Чи справедливо зворотне твердження?

4.30. Виконують три незалежних експерименти, в кожному з яких подія A з'являється з імовірністю 0,4. Розглядається випадкова величина X – кількості появ події A у трьох експериментах. Побудувати ряд розподілу й інтегральну функцію розподілу випадкової величини X. Знайти її математичне сподівання і моду.

4.31. Дати визначення початковим моментам випадкових величин.

4.32. Навести визначальну формулу початкового моменту для дискретної випадкової величини.

4.33. Навести визначальну формулу початкового моменту для неперервної випадкової величини.

4.34. Що називають центрованою випадковою величиною?

4.35. Дати визначення центрального моменту випадкової величини.

4.36. Навести визначальну формулу центрального моменту для дискретної випадкової величини.

4.37. Навести визначальну формулу центрального моменту для неперервної випадкової величини.

4.38. Поставити знак відношення між першим початковим моментом випадкової величини та її математичним сподіванням.

4.39. Для неперервної випадкової величини X знайти суму ймовірностей

$$P(X{=}0{,}5) + P(X{=}0{,}55) + P(X{=}0{,}555)\ .$$

4.40. Що характеризує другий початковий момент?

4.41. Навести визначальну формулу другого початкового моменту для дискретної випадкової величини.

4.42. Навести визначальну формулу другого початкового моменту для неперервної випадкової величини.

4.43. Яку роль відіграє другий початковий момент у дослідженні випадкових величин?

4.44. Що характеризує другий центральний момент?

4.45. Поставити знак відношення між другим центральним моментом випадкової величини та її дисперсією.

4.46. Визначити дисперсію через початкові моменти.

4.47. Що являє собою середнє квадратичне відхилення?

4.48. Що характеризує середнє квадратичне відхилення?

4.49. В умовах вправи **4.30** визначити другий початковий момент α_2, дисперсію D_x, середнє квадратичне відхилення $\sigma_{x.}$

4.50. Два стрільці стріляють кожний по своїй мішені, роблячи незалежно один від одного по одному пострілу. Ймовірність влучення в мішень для першого стрільця p_1=0,7, для другого – p_1=0,6. Розглядаються випадкові величини: X_1 – кількість влучень першого стрільця; X_2 – кількість влучень другого стрільця; їх різниця $X{=}X_1{-}X_2$. Знайти закон розподілу випадкової величини X у вигляді ряду розподілу та у вигляді інтегральної функції розподілу $F(x)$. Побудувати графік функції $F(x)$. Визначити математичне сподівання m_x, дисперсію D_x, середнє квадратичне відхилення σ_x та ймовірність влучення випадкової величини X у заданий діапазон $P\{-0{,}5 \le X < 0{,}5\}$.

Розв’язання. Побудуємо спочатку ряди розподілу для випадкових величин X_1 і X_2:

x_{1i}	0	1
p_{1i}	0,3	0,7

,

x_{2i}	0	1
p_{2i}	0,4	0,6

.

У побудованих законах розподілу ймовірності промахів визначаються як імовірності протилежних подій відповідно: q_1=1–p_1=1–07=0,3; q_2=1–p_2=1–0,6=0,4. Отримані ряди розподілу дозволяють побудувати ряд розподілу для випадкової величини X=X_1–X_2 .

Визначимо спочатку можливі значення випадкової величини X і відповідні ймовірності:

якщо X_1=0 і X_2=1, то X=–1, а ймовірність такого результату $q_{1*}p_2$ = 0,18;

якщо X_1=0 і X_2=0 або X_1=1 і X_2=1, то X=0, а ймовірність такого результату $q_{1*}q_2 + p_{1*}p_2$ = 0,54;

якщо X_1=1 і X_2=0, то X=1, а ймовірність такого результату $q_{1*}p_2$ = 0,28.

Шуканий ряд розподілу

x_i	–1	0	1
p_i	0,18	0,54	0,28

.

Примітка. Для контролю правильності побудови закону розподілу випадкової величини X слід перевірити рівність одиниці суми ймовірностей у другому рядку ряду розподілу.

Ряд розподілу дозволяє визначити інтегральну функцію розподілу. В умовах вправи визначення інтегральної функції відповідає табл.4.2

Таблиця 4.2. Інтегральна функція випадкової величини X

Індекс діапазону	Діапазон x	Визначення $F(x)$
1	$x < -1$	$F(x) = P\{X<x\} = 0$
2	$-1 \le x < 0$	$F(x) = P\{X<x\} = P(X=-1) = 0{,}18$
3	$0 \le x < 1$	$F(x) = P\{X<x\} = P(X=-1) + P(X=0) = 0{,}18 + 0{,}54 = = 0{,}72$
4	$x \ge 1$	$F(x) = P\{X<x\} = P(X=-1) + P(X=0) + P(X=1) =$ 1.1.1 $=0{,}18 + 0{,}54 + 0{,}28 = 1$

Графік функції будуємо відповідно до її табличного завдання, тобто відповідно до табл.4.2 (див. рис.4.14).

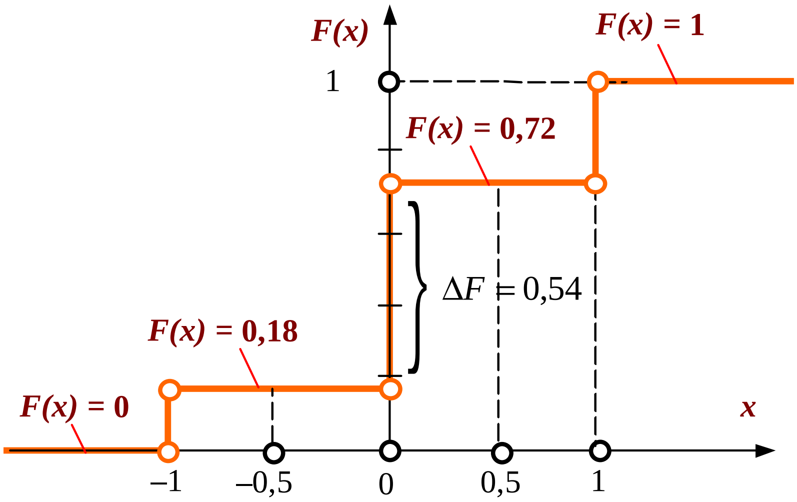


Рис.4.14

Математичне сподівання випадкової величини знайдемо за формулою (4.9)

$$m_x = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = (-1)\cdot 0{,}18 + 0\cdot 0{,}54 + 1\cdot 0{,}28 = 0{,}1.$$

Для визначення дисперсії D_x попередньо встановимо другий початковий момент α_2 за формулою (4.15)

$$\alpha_2 = \sum_{i-1}^{3} x_i^2 p_i = (-1)^2\cdot 0{,}18 + 0^2\cdot 0{,}54 + 1^2\cdot 0{,}28 = 0{,}46\,.$$

Тепер за допомогою формули зв'язку (4.19) визначимо дисперсію

$$D_x = \alpha_2 - m_x^2 = 0{,}46 - (0{,}1)^2 = 0{,}45\ .$$

За формулою (4.20) знайдемо середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{0{,}45} \approx 0{,}67\,.$$

Ймовірність $P\{–0{,}5 \le X < 0{,}5\}$ визначаємо за формулою (4.2) :

$$P\{-0{,}5 \le X < 0{,}5\} = F(0{,}5) - F(-0{,}5) = F(0{,}5) - F(-0{,}5) = 0{,}72 - 0{,}18 = 0{,}54\ .$$

Дану операцію доцільно здійснювати за допомогою графіка $F(x)$ (див. рис.4.14).

4.51. Випадкова величина X задана щільністю розподілу ймовірності:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0,1]; \\ ax, & x \in [0,1]. \end{cases}$$

Знайти: $F(x)$, m_x, D_x, σ_x, Me, $P\{0 \le X < 0{,}5\}$.

Розв'язання. Перед тим як обчислювати шукані величини, необхідно визначити параметр a в заданій щільності розподілу $f(x)$. Для визначення параметра скористаємося 1-ю властивістю щільності розподілу, відповідно до якої визначений інтеграл у нескінченних границях від щільності розподілу дорівнює одиниці. Візьмемо спочатку інтеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{1} ax \cdot dx + \int_{1}^{\infty} 0 \cdot dx = \left.\frac{ax^2}{2}\right|_0^1 = \frac{a}{2}.$$

Потім дорівняємо результат взяття інтеграла одиниці: $\frac{a}{2} = 1$. Звідки a = 2. Підсумковий вираз для щільності розподілу має вигляд: $f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0,1]; \\ 2x, & x \in [0,1]. \end{cases}$ Графік $f(x)$ показано на рис.4.15.

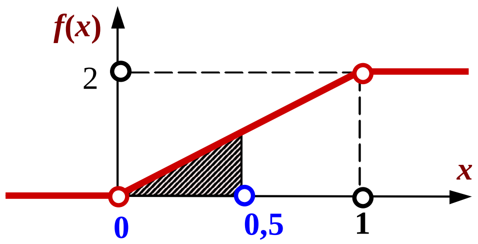


Рис.4.15

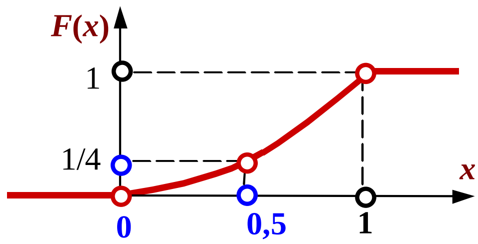


Рис.4.16

Для визначення інтегральної функції скористаємося зворотним перетворенням (4.5). Оскільки щільність розподілу є кусково-неперервною функцією, що має три діапазони з різним виглядом підінтегральної функції, то зворотним перетворенням слід скористатися три рази:

для діапазону $x \le 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dx = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dx = 0;$$

для діапазону $0 < x \le 1$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt + \int_{0}^{x} 2t \cdot dt = 0 + \left.t^2\right|_0^x = x^2;$$

для діапазону $x > 1$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt + \int_{0}^{1} 2t \cdot dt + \int_{1}^{x} 0 \cdot dt = 0 + t^2\Big|_0^1 + 0 = 1.$$

Таким чином, $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le 0; \\ x^2, & \text{якщо} \quad 0 < x \le 1; \\ 1, & \text{якщо} \quad 1 < x. \end{cases}$

На рис.4.16 побудовано графік інтегральної функції $F(x)$.

Для визначення математичного сподівання скористаємося формулою (4.10)

$$m_x = \int_{-\infty}^{x} x \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0 \cdot dx + \int_{0}^{1} x \cdot 2x \cdot dx + \int_{1}^{\infty} x \cdot 0 \cdot dx = 0 + 2\int_{0}^{1} x^2 dx + 0 = \frac{2x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

З метою подальшого визначення дисперсії D_x знайдемо спочатку другий початковий момент:

$$\alpha_2 = \int_{-\infty}^{x} x^2 \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x^2 \cdot 0 \cdot dx + \int_{0}^{1} x^2 \cdot 2x \cdot dx + \int_{1}^{\infty} x^2 \cdot 0 \cdot dx = 0 + 2\int_{0}^{1} x^3 dx + 0 = \frac{2x^4}{4}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Використовуючи формулу (4.19), що зв'язує дисперсію з початковими моментами, визначимо D_x :

$$D_x = \alpha_2 - m_x^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}.$$

За формулою (4.20) знайдемо середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{\frac{1}{18}} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

За визначенням медіани $P\{X<Me\} = P\{X>Me\}$, але $P\{X<Me\} = F(Me) = 0{,}5$. Отже медіану можна знайти за рівнянням $F(Me) = 0{,}5$, що ми і зробимо:

$$\int_{-\infty}^{Me} f(x)dx = 0{,}5;$$

$$\int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{Me} 2xdx = 0{,}5;$$

$$x^2\Big|_0^{Me} = 0{,}5;$$

$$(Me)^2 = 0{,}5;$$

$$Me \approx 0{,}71.$$

Останню шукану величину $P\{0<X<0{,}5\}$ визначимо двома способами:

$$P\{0 \le X < 0{,}5\} = \begin{cases} F(b) - F(a) = F(0{,}5) - F(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 0^2 = \frac{1}{4}; \\ \int_a^b f(x)dx = \int_0^{0{,}5} 2xdx = x^2\Big|_0^{0{,}5} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 0^2 = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Знайденій імовірності на рис.4.15 відповідає заштрихована площа. Задача розв’язана.

4.52. Що характеризує третій центральний момент?

4.53. Навести визначальну формулу третього центрального моменту для дискретної випадкової величини.

4.54. Навести визначальну формулу третього центрального моменту для неперервної випадкової величини.

4.55. Що характеризує і як визначається коефіцієнт асиметрії?

4.56. В умовах вправи **4.30** визначити третій центральний момент μ_3.

4.57. Що характеризує четвертий центральний момент?

4.58. Як визначається величина ексцес, що вона характеризує?

5. ОКРЕМІ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ

5.1. Закони розподілу дискретних випадкових величин

Скільки існує різних дискретних випадкових величин, стільки існує і законів їхнього розподілу. З усього різноманіття дискретних випадкових величин виділяють дві великі групи. Кожна група об'єднує випадкові величини, що мають закон розподілу, характерний тільки для цієї групи. Ймовірності конкретних значень таких випадкових величин обчислюються за однією і тією ж формулою. Відмінність випадкових величин, що входять в одну групу, визначається різними значеннями ключових компонент у визначальних формулах. Ключові компоненти формул називають параметрами закону розподілу.

У першу групу входять так звані біноміальні величини, в другу – пуассонівські. У зв'язку з цим особливий інтерес являють собою біноміальний і пуассонівський закони розподілу дискретних випадкових величин.

Розглянемо більш докладно кожний з названих законів розподілу.

5.1.1. Біноміальний закон розподілу

5.1.1.1. Загальна характеристика біноміальної випадкової величини

Нехай робиться n незалежних експериментів, у кожному з яких з однаковою ймовірністю p може відбутися деяка подія A. Подія A може мати саму різну природу. Випадкова величина X – число експериментів, у яких відбувається подія A – розподілена за біноміальним законом розподілу

$$P(X = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} . \tag{5.1}$$

з рядом розподілу, що відповідає табл.5.1.

Таблиця 5.1. Ряд розподілу біноміальної випадкової величини

x_i	0	1	. . .	m	. . .	n
p_i	$(1–p)^n$	$np(1–p)^{n-1}$	. . .	$C_n^m\, p^m(1–p)^{n-m}$	. . .	p^n

Сума ймовірностей у другому рядку ряду розподілу (табл.5.1) дорівнює одиниці, тобто $\sum_{i=0}^{n} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = 1$. Для доказу даного факту слід суму $\sum_{i=0}^{n} C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$ розглядати як розкладання біному Ньютона зі змінними p і $(1 - p)$, тобто

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = [\, p + (1 - p)\,]^n = 1\ .$$

Біноміальний закон розподілу має два параметри:

p – ймовірність появи події A в одному експерименті;

n – загальне число експериментів (випробувань).

Ймовірність влучення дискретної випадкової величини, розподіленої за біноміальним законом, у заданий діапазон значень встановлюється за допомогою формули

$$P\{k_1 \le X \le k_2\} = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i (1-p)^{n-i}.$$

5.1.1.2. Числові характеристики біноміальної випадкової величини

Математичне сподівання. Розглянемо попередньо випадкову величину X_i – число появ події A в i-му експерименті, $i = \overline{1, n}$. Ряд розподілу випадкової величину має вигляд:

x_{ij}	0	1
p_{ij}	$1-p$	p

. Математичне сподівання для X_i визначимо за формулою (4.9): $m_i = 0*(1\text{-}p) + 1*p = p$.

Біноміальна випадкова величина є сумою величин X_i. Тоді її математичне сподівання визначиться наступним перетворенням:

$$m_x = M[X] = M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} M[X_i] = \sum_{i=1}^{n} p = np\ ,$$

тобто

$$m_x = np\,. \tag{5.2}$$

Дисперсія. Визначимо попередньо другий початковий момент і дисперсію випадкової величини X_i – числа появ події A в i–му експерименті, $i = \overline{1,n}$. Ряд розподілу розглянутої величини наведено вище. Другий початковий момент випадкової величини X_i визначимо за формулою (4.15): $m_i = 0^2{*}(1\text{-}p) + 1^2{*}p = p$, дисперсію – за формулою зв'язку: $D_{xi} = \alpha_{2i} - m_{xi}^2 = p - p^2 = p(1-p)$.

Дисперсія біноміальної випадкової величини X (вона ж сума дисперсій незалежних випадкових величин X_i) визначиться за допомогою наступного перетворення:

$$D_x = D[X] = D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} D[X_i] = \sum_{i=1}^{n} p(1-p) = np(1-p)\,,$$

тобто

$$D_x = np(1-p)\ . \tag{5.3}$$

Середнє квадратичне відхилення визначимо відповідно до формули (4.20):

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{np(1-p)}\,. \tag{5.4}$$

Приклад 5.1. Визначити математичне сподівання m_x, дисперсію D_x і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X – числа появ “орла” при 10 киданнях монети.

Розв’язання. Кидання монети – це незалежні експерименти. Ймовірність появи “орла” при кожному киданні монети однакова і дорівнює 0,5. Отже випадкова величина X розподілена по біноміальному закону. А це значить, що її математичне сподівання визначається за формулою (5.2):

$$m_x = np = 10{*}0{,}5 = 5\ ;$$

дисперсія – за формулою (5.3):

$$D_x = np(1–p) = 10{*}0{,}5{*}(1–0{,}5) = 2{,}5\ ;$$

середнє квадратичне відхилення – за формулою (5.4):

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{2{,}5} \approx 1{,}58\,.$$

5.1.2. Закон розподілу Пуассона

Закон розподілу Пуассона пов'язаний з рідкими подіями, які складають найпростіший потік подій. Тому подальший виклад буде стосуватися матеріалу, що визначає і характеризує основні особливості випадкового потоку подій і його окремого випадку – найпростішого потоку подій.

5.1.2.1. Найпростіший потік подій

Визначення 5.1. ***Випадковим потоком подій*** називають події, які відбуваються одна за одною у випадкові моменти часу.

Визначення 5.2. ***Найпростішим потоком подій*** називається потік подій, який має наступні три властивості:

– *стаціонарність*;
– *ординарність*;
– *відсутність післядії*.

Прикладом найпростішого потоку подій може бути потік заявок на придбання квитків, що поступають по телефону в касу театру.

Дамо визначення вище зазначеним властивостям найпростішого потоку.

Визначення 5.3. Випадковий потік подій називають ***стаціонарним***, якщо ймовірність влучення певного числа подій на заданий інтервал часу залежить тільки від довжини інтервалу T і не залежить від того, де на числовій осі t розташований цей інтервал.

Якщо інтервали часу T_1 і T_2, які знаходяться на числовій осі t у різних місцях (рис.5.1), рівні між собою, то рівні й імовірності появи визначеного числа подій m протягом цих інтервалів $P_1(X=m)$ і $P_2(X=m)$:

$$T_1 = T_2 \quad \Rightarrow \quad P_1(X=m) = P_2(X=m).$$

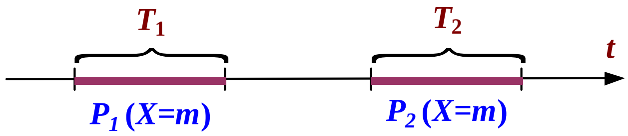


Рис.5.1.

Визначення 5.4. Випадковий потік подій називається ***ординарним***, якщо ймовірність влучення двох і більше подій на нескінченно малий інтервал часу Δt занадто мала в порівнянні з ймовірністю влучення однієї події в цей інтервал.

Іншими словами, дві і більше події на одному нескінченно малому інтервалі часу відбутися не можуть, тобто має місце ліміт $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{P\{X > 1\}}{P(X = 1)} = 0$.

Визначення 5.5. Випадковий потік подій називається потоком ***без післядії***, якщо ймовірність влучення певного числа подій на інтервал часу довжиною T не залежить від того, скільки подій потрапило на будь-який інший інтервал, що не перетинається з першим.

Ця властивість потоку говорить про те, що всі наступні події в потоці не залежать від попередніх.

5.1.2.2. Загальна характеристика пуассонівської випадкової величини

Для найпростішого потоку подій випадкова величина X – кількість подій, що потрапили на інтервал T, розподілена за законом Пуассона

$$P(X = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \qquad (5.5)$$

де $a = \lambda T = np$ – середнє число подій, що потрапляють на інтервал T (єдиний параметр закону розподілу);

λ – інтенсивність настання подій (кількість подій в одиницю часу);

T – певний період часу.

Ряд розподілу пуассонівської випадкової величини відповідає табл.5.2.

Таблиця 5.2. Ряд розподілу пуассонівської випадкової величини

x_i	0	1	. . .	m	. . .
p_i	e^{-a}	$a\,e^{-a}$	. . .	$(a\,e^{-a})/m!$	. . .

Доведення формули Пуассона (5.5). Введемо позначення:

λ – інтенсивність подій;

T – заданий інтервал часу.

Розіб'ємо інтервал часу довжиною T на ділянки Δt у кількості n. Причому $\Delta t = \frac{T}{n} \to 0$. З погляду на стаціонарність та ординарність потоку ймовірність того, що на ділянці Δt відбудеться одна подія, визначиться в такий спосіб:

$$p = \lambda \Delta t = \frac{\lambda T}{n},$$

а ймовірність того, що на ділянці Δt не відбудеться жодної події:

$$q = 1 - p = 1 - \lambda \Delta t = 1 - \frac{\lambda T}{n}.$$

За умови $n \to \infty$ ймовірність $p = \frac{\lambda T}{n} \to 0$. Ймовірність того, що за період часу T відбудеться рівно m подій, можна розглядати як ймовірність появи m подій в n незалежних випробуваннях при $n \to \infty$ і $p \to 0$, тобто обчислювати її за формулою Бернуллі:

$$P(X = m) = \lim_{n\to\infty} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\overbrace{n(n-1)...(n-m+1)}^{m}}{m!} \cdot p^m (1-p)^{n-m}\right] =$$

$$= \frac{n^m}{m!} \cdot p^m \lim_{n\to\infty} \frac{(1-p)^n}{(1-p)^m} = \frac{(np)^m}{m!} \cdot \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{np}{n}\right)^n}{1^m} = \frac{(a)^m}{m!} \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{a}{n}\right)^n.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{a}{n}\right)^n = e^{-a}$ є *визначним лімітом* (див. Додаток С), то $P(X=m)=\dfrac{(a)^m}{m!}.e^{-a}$, що й треба було довести.

Переконаємося, що сума ймовірностей у другому рядку ряду розподілу (табл.5.2) дорівнює одиниці, тобто $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\dfrac{a^i}{i!}e^{-a}=1$. Для доказу цієї рівності перетворимо її ліву частину: $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\dfrac{a^i}{i!}e^{-a}=e^{-a}\sum\limits_{i=0}^{\infty}\dfrac{a^i}{i!}$. Тут сума $e^{-a}\sum\limits_{i=0}^{\infty}\dfrac{a^i}{i!}$ є функціональний *нескінченний ряд,* що сходиться до функції e^a (див. Додаток С).

Здійснимо перетворення вихідної суми від початку до кінця:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{a^i}{i!}e^{-a}=e^{-a}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{a^i}{i!}=e^{-a}\cdot e^{a}=1.$$

Таким чином, вихідну рівність $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\dfrac{a^i}{i!}e^{-a}=1$ доведено.

5.1.2.3. Числові характеристики пуассонівської випадкової величини

Математичне сподівання. Відповідно до формули (4.9) математичне сподівання дискретної випадкової величини визначиться в такий спосіб:

$$m_x=M[X]=\sum_{i=0}^{\infty}x_i\,p_i=\sum_{i=0}^{\infty}i\cdot\frac{a^i}{i!}e^{-a}=e^{-a}\sum_{i=0}^{\infty}i\cdot\frac{a^i}{i!}=e^{-a}\cdot a\cdot\sum_{i=0}^{\infty}i\cdot\frac{a^{i-1}}{i!}=e^{-a}\cdot a\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a^{i-1}}{(i-1)!}\ .$$

Остання сума являє собою функціональний ряд, що сходиться до функції e^a (див. Додаток С). Продовжимо перетворення:

$$m_x=e^{-a}\cdot a\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a^{i-1}}{(i-1)!}=e^{-a}\cdot a\cdot e^{a}=a\,,$$

тобто математичне сподівання пуассонівської випадкової величини

$$m_x=a\,. \tag{5.6}$$

Дисперсія. Визначимо попередньо другий початковий момент відповідно до формули (4.15):

$$\alpha_2 = \sum_{i-0}^{\infty} x_i^2 p_i = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \cdot \frac{a^i}{i!} e^{-a} = e^{-a} \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \frac{a^i}{i!} = e^{-a} a \sum_{i=1}^{\infty} i \frac{a^{i-1}}{(i-1)!} = e^{-a} a \sum_{i=1}^{\infty} (i-1+1) \frac{a^{i-1}}{(i-1)!} =$$

$$= e^{-a} a \left[\sum_{i=1}^{\infty} (i-1) \frac{a^{i-1}}{(i-1)!} + \overbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a^{i-1}}{(i-1)!}}^{e^a} \right] = e^{-a} a \left[\overbrace{a \sum_{i=2}^{\infty} \frac{a^{i-2}}{(i-2)!}}^{e^a} + e^a \right] = e^{-a} a\, e^a (a+1) = a(a+1)\,.$$

Дисперсію пуассонівської випадкової величини визначимо за формулою зв'язку:

$$D_x = \alpha_2 - m_x^2 = a(a+1) - a^2 = a\,,$$

тобто дисперсія

$$D_x = a\,. \tag{5.7}$$

Середнє квадратичне відхилення знайдемо відповідно до формули (4.20):

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{a}\,. \tag{5.8}$$

5.1.2.4. Ймовірність влучення пуассонівської випадкової величини в заданий інтервал

Для пуассонівских випадкових величин існують дві спеціальні таблиці, що дозволяють вирішувати різні задачі, пов'язані з розподілом Пуассона, без обчислення факторіальних величин типу $m!$, степенних величин типу a^m і показових величин типу e^{-a}.

Перша таблиця дозволяє визначати ймовірність того, що пуассонівська випадкова величина приймає значення m, тобто ймовірність $P(X=m)$.

Друга таблиця дозволяє визначати ймовірність того, що пуассонівська випадкова величина приймає значення, яке менше або рівне m, тобто ймовірність $P\{X \le m\}$.

Друга таблиця є більш універсальною, тому що дозволяє легко визначати ймовірності:

$P(X=m)$ як різницю $P\{X \le m\} - P\{X \le (m-1)\}$;

$P\{X \ge m\}$як різницю $1 - P\{X \le (m-1)\}$;

$P\{m_1 \le X \le m_2\}$ як різницю $P\{X \le m_2\} - P\{X \le (m_1-1)\}$.

5.2. Закони розподілу неперервних випадкових величин

Серед неперервних випадкових величин на особливу увагу заслуговують величини, що мають один з наступних законів розподілу:

- рівномірний;
- показовий;
- нормальний.

Розглянемо докладніше кожний з названих законів розподілу.

5.2.1. Рівномірний закон розподілу

5.2.1.1. Загальна характеристика

Визначення 5.6. Неперервна випадкова величина розподілена за рівномірним законом, якщо її щільність розподілу має вигляд

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin[a,b];\\ c, & x\in[a,b].\end{cases} \qquad (5.9)$$

Графік щільності розподілу для рівномірно розподіленої випадкової величини має вигляд, показаний на рис.5.1.

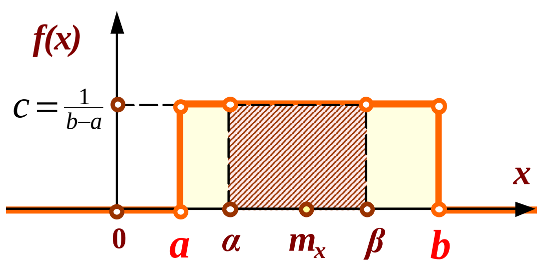


Рис.5.1

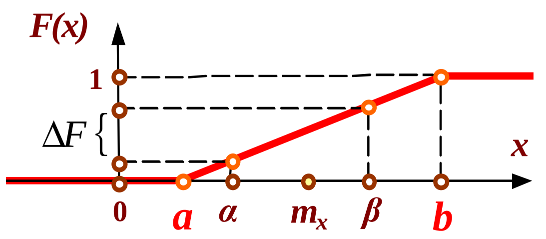


Рис.5.2

Якщо випадкова величина розподілена на заданому інтервалі за рівномірним законом, то величина c у (5.9) має конкретне значення, що визначається за допомогою першої властивості щільності розподілу (4.6). Для цього необхідно взяти визначений інтеграл у нескінченних границях від щільності розподілу (5.9) і дорівняти його одиниці:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} 0\,dx + \int_{a}^{b} c\,dx + \int_{b}^{\infty} 0\,dx =$$

$$= 0 + cx\Big|_a^b + 0 = c(b-a);$$

$$c(b-a) = 1.$$

Звідси $c = \dfrac{1}{b-a}$. Тоді

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a,b]; \\ \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b]. \end{cases} \tag{5.10}$$

Рівномірний закон розподілу має два параметри: a і b.

Інтегральна функція розподілу, відповідно до зворотного перетворення (4.5), визначається в такий спосіб:

$$F(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dt = 0, & x < a; \\ \int_{-\infty}^{a} 0 \cdot dt + \int_{a}^{x} \dfrac{1}{b-a} \cdot dt = \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b; \\ \int_{-\infty}^{a} 0 \cdot dt + \int_{a}^{b} \dfrac{1}{b-a} \cdot dt + \int_{b}^{x} 0 \cdot dt = \dfrac{b-a}{b-a} = 1, & x > b. \end{cases}$$

Таким чином, інтегральна функція рівномірно розподіленої величини визначається як

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b; \\ 1, & x > b. \end{cases} \tag{5.11}$$

Графік інтегральної функції для рівномірно розподіленої випадкової величини має вигляд, показаний на рис.5.2.

5.2.1.2. Числові характеристики

Математичне сподівання. Відповідно до формули (4.10) математичне сподівання неперервної випадкової величини визначиться в такий спосіб:

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} x \cdot 0 \cdot dx + \int_{a}^{b} x \frac{1}{b-a} \cdot dx + \int_{b}^{\infty} x \cdot 0 \cdot dx = \frac{1}{b-a} \cdot \left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2},$$

тобто

$$m_x = \frac{a+b}{2} \quad . \tag{5.12}$$

Математичне сподівання (5.12) рівномірно розподіленої випадкової величини знаходиться в середині відрізка [a,b] (див. рис.5.1). Щільність розподілу (5.10) має осьову симетрію з віссю, що проходить через точку m_x паралельно осі ординат.

Дисперсія. Визначимо попередньо другий початковий момент відповідно до формули (4.16):

$$\alpha_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} x^2 0 \cdot dx + \int_{a}^{b} x^2 \frac{1}{b-a} dx + \int_{b}^{\infty} x^2 0 \cdot dx = \left.\frac{x^3}{3(b-a)}\right|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3},$$

тобто

$$\alpha_2 = \frac{a^2+ab+b^3}{3} \quad . \tag{5.13}$$

Дисперсію рівномірно розподіленої випадкової величини визначимо за формулою зв'язку:

$$D_x = \alpha_2 - m_x^2 = \frac{a^2+ab+b^3}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12},$$

тобто

$$D_x = \frac{(b-a)^2}{12} \quad . \tag{5.14}$$

Середнє квадратичне відхилення знайдемо за формулою (4.20):

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \frac{(b-a)\sqrt{3}}{6}. \tag{5.15}$$

5.2.1.3. Ймовірність влучення випадкової величини в заданий діапазон

Ймовірність влучення рівномірно розподіленої випадкової величини в заданий діапазон $P\{\alpha \le X \le \beta\}$, якщо діапазон [$\alpha$,$\beta$] входить у діапазон [$a$,$b$], можна визначити двома способами:

1-й спосіб. За формулою (4.2)

$$P\{\alpha \le X \le \beta\} = F(\beta) - F(\alpha) = \frac{\beta - a}{b - a} - \frac{\alpha - a}{b - a} = \frac{\beta - \alpha}{b - a} \ .$$

2-й спосіб. За формулою (4.8)

$$P\{\alpha \le X \le \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b-a} dx = \left. \frac{x}{b-a} \right|_{\alpha}^{\beta} = \frac{\beta - \alpha}{b - a} \ .$$

Таким чином,

$$[\alpha, \beta] \subset [a, b] \quad \Rightarrow \quad P\{\alpha \le X \le \beta\} = \frac{\beta - \alpha}{b - a} . \tag{5.16}$$

З геометричної точки зору ймовірності $P\{\alpha \le X \le \beta\}$ відповідає площа, виділена штрихуванням на рис.5.1.

Якщо діапазон $[\alpha,\beta]$ не входить до діапазону $[a,b]$, то вираз (5.16) не є справедливим. У цьому випадку необхідно керуватися виразом

$$[\alpha, \beta] \not\subset [a, b] \quad \Rightarrow \quad P\{\alpha \le X \le \beta\} = \frac{(\beta - \alpha) \cap (b - a)}{b - a} , \tag{5.17}$$

де $(\beta - \alpha) \cap (b - a)$ – довжина діапазону на числовій осі, що є загальною (перетинанням) для діапазону $[\alpha,\beta]$ і діапазону $[a,b]$.

5.2.2. Показовий закон розподілу

5.2.2.1. Загальна характеристика

У *найпростішому потоці подій* випадкова величина T – інтервал часу між двома послідовними подіями – розподілена за *показовим законом*.

Визначення 5.7. Неперервна випадкова величина розподілена за показовим законом, якщо її щільність розподілу має вигляд

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \lambda e^{-\lambda t}, & t \ge 0, \end{cases} \tag{5.18}$$

де λ – інтенсивність подій, тобто кількість подій в одиницю часу.

Графік щільності розподілу для випадкової величини, розподіленої за показовим законом, має вигляд, показаний на рис.5.3.

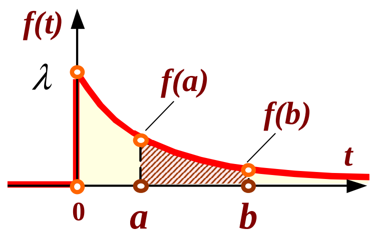


Рис.5.3

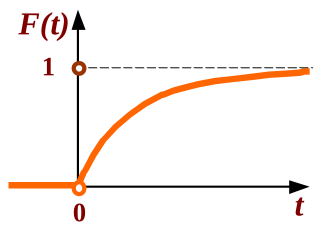


Рис.5.4

Показовий закон розподілу має тільки один параметр λ .

Інтегральна функція розподілу, відповідно до зворотного перетворення (4.5), визначається в такий спосіб:

$$F(t)=\begin{cases}\int\limits_{-\infty}^{t}0\cdot dx=0\,, & t<0\,;\\ \int\limits_{-\infty}^{0}0\cdot dx+\int\limits_{0}^{t}\lambda\, e^{-\lambda x}dx=\lambda\int\limits_{0}^{t}e^{-\lambda x}dx=\lambda\left(-\dfrac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{t}=-e^{-\lambda t}+1=1-e^{-\lambda t}, & t\geq 0\,.\end{cases}$$

Таким чином, інтегральна функція випадкової величини, розподіленої за показовим законом, визначається виразом

$$F(t)=\begin{cases}0\,, & t<0\,;\\ 1-e^{-\lambda t}, & t\geq 0\,.\end{cases} \tag{5.19}$$

Графік інтегральної функції (5.19) зображений на рис.5.4.

5.2.2.2. Числові характеристики

Математичне сподівання. Математичне сподівання випадкової величини, розподіленої за показовим законом, визначається рівністю

$$m_x=\frac{1}{\lambda}\ . \tag{5.20}$$

Доведення. Відповідно до формули (4.10) математичне сподівання випадкової величини, розподіленої за показовим законом, визначається в такий спосіб:

$$m_t = \int_{-\infty}^{\infty} t\ f(t)dx = \int_{-\infty}^{0} t \cdot 0 \cdot dx + \int_{0}^{\infty} t\lambda e^{-\lambda t} dt\ = \int_{0}^{\infty} t\lambda e^{-\lambda t} dt\ .$$

Отриманий інтеграл інтегруємо вроздріб. Нагадаємо правило обчислення визначеного інтеграла вроздріб: $\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$. Отже позначимо: $u = -t,\quad dv = -\lambda e^{-\lambda t} dt$, тоді $du = -dt,\quad v = e^{-\lambda t}$. Інтегруємо вроздріб:

$$\int_0^{\infty} t\lambda e^{-\lambda t} dt = \left[\underbrace{-t}_{u} \cdot \underbrace{e^{-\lambda t}}_{v} \right]_0^{\infty} - \left(\underbrace{-\int_0^{\infty} \underbrace{e^{-\lambda t}}_{v} dt}_{\int_a^b v du} \right) = \underbrace{\lim_{t\to\infty} \frac{-t}{e^{\lambda t}}}_{0} - \underbrace{\lim_{t\to 0}\left(-te^{-\lambda t}\right)}_{0} - \left.\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\right|_0^{\infty} = \underbrace{-\lim_{t\to\infty} \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}}_{0} + \underbrace{\lim_{t\to 0} \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}}_{\frac{1}{\lambda}} = \frac{1}{\lambda},$$

тобто

$$m_x = \frac{1}{\lambda}\ .$$

Примітка. Обчислення ліміту $\lim_{t\to\infty} \frac{-t}{e^{-\lambda t}}$ здійснюється за правилом Лопіталя (див. Додаток С).

Дисперсія. Визначимо попередньо другий початковий момент відповідно до формули (4.16):

$$\alpha_2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2\ f(t)dx = \int_{-\infty}^{0} t^2 \cdot 0 \cdot dx + \int_{0}^{\infty} t^2 \lambda e^{-\lambda t} dt\ = \int_{0}^{\infty} t^2 \lambda e^{-\lambda t} dt\ .$$

Отриманий інтеграл інтегруємо вроздріб. Позначимо: $u = t^2,\quad dv = \lambda e^{-\lambda t} dt$, тоді $du = 2tdt,\quad v = -e^{-\lambda t}$. Інтегруємо вроздріб:

$$\alpha_2 = \int_0^{\infty} t^2 \lambda e^{-\lambda t} dt = \underbrace{\left[\underbrace{-t^2 e^{-\lambda t}}_{uv} \right]_0^{\infty}}_{0} - \left(\underbrace{-2\int_0^{\infty} t\, e^{-\lambda t} dt}_{\int_a^b v du} \right) = \frac{2}{\lambda} \underbrace{\int_0^{\infty} t\lambda e^{-\lambda t}}_{m_t = \frac{1}{\lambda}} = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Дисперсію визначимо за формулою зв'язку:

$$D_t = \alpha_2 - m_t^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2},$$

тобто

$$D_t = \frac{1}{\lambda^2}. \tag{5.21}$$

Середнє квадратичне відхилення визначимо відповідно до формули (4.20):

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda}. \tag{5.22}$$

5.2.2.3. Ймовірність влучення випадкової величини в заданий діапазон

Ймовірність влучення випадкової величини в заданий діапазон $P\{a \le T \le b\}$, якщо діапазон $[a,b]$ входить у діапазон $[0,\infty]$, можна визначити двома способами:

1-й спосіб. За формулою (4.2)

$$P\{a \le T \le b\} = F(b) - F(a) = \left(1 - e^{-\lambda b}\right) - \left(1 - e^{-\lambda a}\right) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

2-й спосіб. За формулою (4.8)

$$P\{a \le T \le b\} = \int_a^b \lambda e^{-\lambda t} dt = -e^{-\lambda t}\Big|_a^b = -\left(e^{-\lambda b} - e^{-\lambda a}\right) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Таким чином,

$$P\{a \le T \le b\} = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}. \tag{5.23}$$

З геометричної точки зору ймовірності $P\{a \le T \le b\}$ відповідає площа, виділена штрихуванням на рис.5.3.

5.2.3. Нормальний закон розподілу

5.2.3.1. Загальна характеристика

Найбільш простим законом, що досить точно відображує випадкові помилки вимірювань, є так званий нормальний закон розподілу.

Визначення 5.8. Неперервна випадкова величина розподілена за нормальним законом, якщо її щільність розподілу має вигляд

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \tag{5.24}$$

де σ і m – параметри розподілу.

Графік щільності розподілу для випадкової величини, розподіленої за нормальним законом, має вигляд, показаний на рис.5.5. Щільність розподілу (5.24) має осьову симетрію з віссю, що проходить через точку m_x паралельно осі ординат.

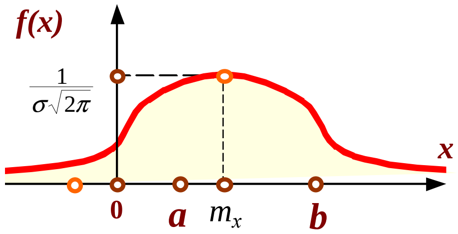


Рис.5.5

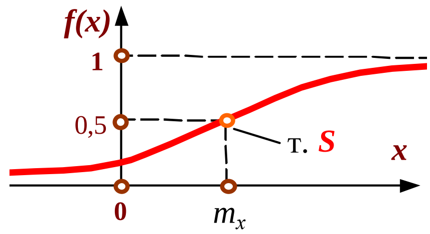


Рис.5.6

Інтегральна функція розподілу, відповідно до зворотного перетворення (4.5), визначається в такий спосіб:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt .$$

Таким чином, інтегральна функція випадкової величини, розподіленої за нормальним законом, визначається інтегралом

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt . \tag{5.25}$$

Графік інтегральної функції (5.25) зображений на рис.5.6. Крива інтегральної функції (5.25) має центральну симетрію відносно точки ***S*** .

5.2.3.2. Числові характеристики

Математичне сподівання. Математичне сподівання випадкової величини, розподіленої за нормальним законом, визначається виразом

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = m . \tag{5.26}$$

Дисперсія. Дисперсія випадкової величини, розподіленої за нормальним законом, визначається виразом

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2 . \tag{5.27}$$

Середнє квадратичне відхилення визначається відповідно до формули (4.20):

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sigma . \tag{5.28}$$

Центральні моменти. Центральні моменти будь-якого порядку нормально розподіленої випадкової величини визначаються рекурентним співвідношенням

$$\mu_s = (s-1)\mu_{s-2}\sigma^2 . \tag{5.29}$$

Знаючи 1-й і 2-й центральні моменти, можна легко знайти будь-який інший.

Оскільки 1-й центральний момент для всіх випадкових величин дорівнює нулю, то всі непарні центральні моменти для нормально розподіленої випадкової величини також рівні нулю.

Оскільки 2-й центральний момент

$$\mu_2 = D_x = \sigma^2 ,$$

то всі парні центральні моменти нормально розподіленої випадкової величини легко визначаються за допомогою виразу (5.29):

$$\mu_4 = (4-1)\,\mu_2\,\sigma^2 = 3\cdot\sigma^2\cdot\sigma^2 = 3\sigma^4 ;$$
$$\mu_6 = (4-1)\,\mu_4\,\sigma^2 = 5\cdot 3\sigma^2\cdot\sigma^2 = 15\sigma^4 ;$$
$$\mu_8 = (4-1)\,\mu_6\,\sigma^2 = 7\cdot 15\sigma^2\cdot\sigma^2 = 105\sigma^4 ;$$
$$\ldots$$

Оскільки всі центральні непарні моменти для нормально розподіленої випадкової величини дорівнюють нулю, то *коефіцієнт асиметрії* також дорівнює нулю:

$$S = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{0}{\sigma^3} = 0\,.$$

Коефіцієнт гостровершинності (величина ексцес) для нормально розподіленої випадкової величини також дорівнює нулю:

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{3\sigma^4}{\sigma^4} - 3 = 0\,.$$

5.2.3.3. Ймовірність влучення випадкової величини в заданий діапазон

Ймовірність влучення нормально розподіленої випадкової величини в заданий діапазон $P\{a \le X \le b\}$ можна одержати за відомими формулами:

$$P\{a \le X \le b\} = \begin{cases} F(b) - F(a); \\ \int\limits_a^b f(x)dx\,. \end{cases}$$

Однак у цьому разі інтегрування треба проводити чисельними методами з залученням обчислювальної техніки. Щоб уникнути необхідності інтегрувати інтеграл, що не береться, використовують окрему інтегральну функцію

$$F^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\,, \qquad (5.30)$$

тобто інтегральну функцію нормально розподіленої випадкової величини з параметрами: m = 0; σ = 1. Розподіл (5.30) називають *стандартним нормальним розподілом.*

Інтегральна функція $F(x)$ нормально розподіленої випадкової величини пов'язана зі стандартною інтегральною функцією співвідношенням

$$F(x) = F^*\left(\frac{x - m}{\sigma}\right).$$

Тоді ймовірність влучення випадкової величини в заданий діапазон

$$P\{a \le X \le b\} = F^*\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - F^*\left(\frac{a-m}{\sigma}\right). \quad (5.31)$$

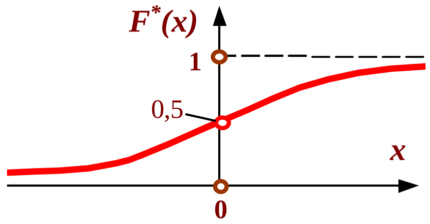


Рис.5.7

На рис.5.7 зображена інтегральна функція стандартного нормального розподілу (порівняй з рис.5.6)

Розглянемо $F^*(x)$ від аргументу $x > 0$

$$F^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt}_{0,5} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt}_{\Phi(x)} = 0,5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x) + 0,5,$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа (див. Додаток В).

Оскільки $F^*(x) = \Phi(x) + 0,5$, то (5.31) перепишеться як

$$P\{a \le X \le b\} = F^*\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - F^*\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) + 0,5 - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) - 0,5,$$

тобто

$$P\{a \le X \le b\} = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right). \quad (5.32)$$

Формула (5.32) має високу універсальність, оскільки дозволяє визначати ймовірність влучення на задану ділянку будь-якої нормально розподіленої випадкової величини незалежно від значень її параметрів m і σ.

5.2.3.4. Правило трьох сигм

Формула (5.32) може бути використана для обчислення ймовірності того, що відхилення випадкової величини X, розподіленої за нормальним законом, від її математичного сподівання за абсолютним значенням менше заданого числа δ. Часто такий розрахунок потрібний у практичних задачах, коли потрібно знайти ймовірність здійснення нерівності

$$|X - m| < \delta. \quad (5.33)$$

Перетворимо (5.33) у

$$m - \delta < X < m + \delta \quad (5.34)$$

і підставимо у формулу (5.32). Оскільки *Ф*(*x*) непарна функція, тобто *Ф*(–*x*) = –*Ф*(*x*), маємо:

$$P(|X-m|<\delta)=P(m-\delta<X<m+\delta)=\Phi\left[\frac{(m+\delta)-m}{\sigma}\right]-\Phi\left[\frac{(m-\delta)-m}{\sigma}\right]=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right),$$

тобто ймовірність модуля відхилення випадкової величини, розподіленої за нормальним законом, можна обчислити за формулою

$$P(|X-m|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \tag{5.35}$$

Якщо вимірювати величину відхилення в одиницях σ, то можна вивести практично корисну закономірність, що відома як правило трьох сигм. Дійсно, покладемо у (5.35) $\delta=\sigma\cdot t$. Одержимо:

$$P\left(|X-m|<\sigma t\right)=2\Phi(t).$$

Якщо $t=3$ і, отже, $\sigma\cdot t=3\sigma$, то

$$P\left(|X-m|<3\sigma\right)=2\Phi(3)=0{,}9973,$$

тобто ймовірність того, що відхилення за абсолютним значенням буде менше потроєного середньоквадратичного відхилення, дуже велика. Це означає, що ймовірність протилежної події, яка полягає в тому, що абсолютне відхилення перевищить потроєне σ, дуже мала, а саме дорівнює 0,0027. У цьому й полягає сутність правила трьох сигм.

Правило трьох сигм. Якщо випадкова величина розподілена нормально, то абсолютна величина її відхилення від математичного сподівання не перевершує потроєного середньоквадратичного відхилення.

5.3. Розподіли, похідні від нормального розподілу

Розглянемо декілька розподілів, що зв'язані з нормальним розподілом і використовуються як інструмент для розв’язання багатьох задач математичної статистики.

5.3.1. Розподіл Пірсона

Розподіл Пірсона має ще іншу назву – *хі-квадрат*.

Нехай незалежні випадкові величини u_i розподілені за стандартним нормальним законом, тобто за нормальним законом з параметрами $m = 0$ і $\sigma = 1$. Тоді випадкова величина

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \tag{5.36}$$

розподілена за законом хі-квадрат з *числом ступенів свободи* k, рівним n. Число ступенів свободи є абстрактним поняттям, що визначає в даному випадку умови незалежності величин u_i. Наявність будь-якої залежності між величинами u_i зменшує число ступенів свободи k на одиницю.

Зі збільшенням числа ступенів свободи k розподіл хі-квадрат наближається до стандартного нормального розподілу.

Для розподілу хі-квадрат складено таблицю ймовірності того, що величина χ^2 виявиться більшою за фіксоване значення χ_1^2, тобто ймовірності $P\left\{\chi^2 > \chi_1^2\right\} = \beta$, де β – довірча ймовірність. Таблиця має два вхідних параметри: β і k.

5.3.2. Розподіл Ст'юдента

Нехай випадкова величина u розподілена за стандартним нормальним законом, а випадкова величина v розподілена за законом хі-квадрат з числом ступенів свободи k і не залежить від u. Тоді випадкова величина

$$t = \frac{u}{\sqrt{v/k}} \tag{5.37}$$

розподілена за законом Ст'юдента з числом ступенів свободи k.

Для розподілу Ст'юдента складено таблицю ймовірності того, що випадкова величина $|t|$ виявиться меншою за фіксоване значення t_1, тобто ймовірності $P\left\{|t| < t_1\right\} = \beta$, де β – довірча ймовірність. Таблиця має два входи:

- рівень значущості $2\alpha = 1 - \beta$;
- число ступенів свободи k.

5.3.3. Розподіл Фішера

Нехай незалежні випадкові величини u і v розподілені за законом хі-квадрат відповідно зі ступенями свободи k_1 і k_2. Тоді випадкова величина

$$F = \frac{u/k_1}{v/k_2} \tag{5.38}$$

розподілена за законом Фішера зі ступенями свободи k_1 і k_2.

Для розподілу Фішера складено таблицю ймовірності того, що випадкова величина F виявиться більшою за фіксоване значення F_1, тобто ймовірності $P\{F > F_1\} = \beta$, де β – довірча ймовірність. Таблиця має три входи:

– довірча ймовірність β ;
– число ступенів свободи k_1;
– число ступенів свободи k_2.

5.4. Практикум і запитання для самоконтролю

5.1. Які випадкові величини розподілені за біноміальним законом?

5.2. Скласти ряд розподілу для дискретної випадкової величини, розподіленої за біноміальним законом з параметрами розподілу p=0,6 і n=4.

5.3. Навести формулу для обчислення математичного сподівання біноміальної величини.

5.4. Навести формулу для обчислення дисперсії біноміальної величини.

5.5. Навести формулу для обчислення середнього квадратичного відхилення біноміальної величини.

5.6. Навести формулу для обчислення ймовірності влучення значення біноміальної величини в заданий діапазон [k_1, k_2].

5.7. Дати визначення потоку подій.

5.8. Дати визначення найпростішого потоку подій.

5.9. Який потік подій називається стаціонарним?

5.10. Який потік подій називається ординарним?

5.11. Який потік подій називається потоком без післядії?

5.12. Які випадкові величини розподілені за законом Пуассона?

5.13. Чому дорівнює математичне сподівання пуассонівської величини?

5.14. Чому дорівнює дисперсія пуассонівської величини?

5.15. Навести формулу для обчислення середнього квадратичного відхилення пуассонівської величини.

5.16. Випадкова величина X – кількість блоків, що поступають з ЖБК на будівельний майданчик, – розподілена за законом Пуассона. Інтенсивність надходження блоків $\gamma = 2$ *блоки/годину*. Знайти ймовірність того, що кількість блоків, що надійшли за 2 години:

***а*)** складе 10 шт.;

***б*)** перевищить 10 шт.;

***в*)** складе менше 10 шт.

5.17. Випадкова величина X підпорядкована закону Пуассона з математичним сподіванням $a = 3$. Записати функцію розподілу ймовірності випадкової величини X. Знайти ймовірність того, що випадкова величина X прийме:

***а*)** значення менше, ніж її математичне сподівання;

***б*)** позитивне значення.

5.18. Потік заявок, що поступають на телефонну станцію, являє собою найпростіший потік подій. Математичне сподівання числа викликів за годину дорівнює 30. Знайти ймовірність того, що за хвилину надійде не менше двох викликів.

5.19. Пристрій складається з 1000 елементів, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність відмови будь-якого елемента протягом часу T дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що за час T відмовлять рівно 3 елементи.

5.20. Підручник виданий тиражем 100 000 екземплярів. Ймовірність того, що підручник зброшурований неправильно, дорівнює 0,0001. Знайти ймовірність того, що тираж містить 5 бракованих книг.

5.21. Верстат-автомат штампує деталі. Ймовірність того, що виготовлена деталь виявиться бракованою, дорівнює 0,01. Знайти ймовірність того, що серед 200 деталей виявиться рівно 4 бракованих.

5.22. Завод відправив на базу 500 виробів. Ймовірність ушкодження виробу в дорозі дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що в дорозі буде пошкоджено виробів:

***а*)** рівно 3;

***б*)** менше 3;

***в*)** більше 3;

***г*)** принаймні один.

5.23. Пристрій складається з великого числа незалежно працюючих елементів з однаковою (дуже малою) ймовірністю відмови кожного елемента за час T. Знайти середнє число елементів, що вийдуть з ладу за час T, якщо ймовірність того, що за цей час відмовить принаймні один елемент, дорівнює 0,98.

5.24. Дати визначення випадковим величинам, розподіленим за рівномірним законом.

5.25. Записати в загальному вигляді інтегральну функцію рівномірно розподіленої випадкової величини.

5.26. Навести формулу для обчислення математичного сподівання рівномірно розподіленої випадкової величини.

5.27. Навести формулу для обчислення дисперсії рівномірно розподіленої випадкової величини.

5.28. Навести формулу для обчислення середнього квадратичного відхилення рівномірно розподіленої випадкової величини.

5.29. Навести формулу для обчислення ймовірності влучення значення рівномірно розподіленої випадкової величини в заданий діапазон $P\{\alpha \le X \le \beta\}$, якщо діапазон [α, β] входить до діапазону [a,b].

5.30. Випадкова величина X задана інтегральною функцією

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x<-1; \\ \dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{4}, & \text{при} \quad -1\le x\le \dfrac{1}{3}; \\ 1, & \text{при} \quad x>\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті випробування величина X прийме значення, що знаходиться в інтервалі: а) (0; 1/3) ; б) (-5; 1/3) .

5.31. Електропоїзди в метро слідують один за одним строго за графіком з інтервалом руху 5 хвилин. Знайти ймовірність того, що пасажир, який підійшов до перону метро, буде очікувати черговий потяг менше 3 хвилин.

5.32. Хвилинна стрілка електричних годинників переміщується стрибком наприкінці кожної хвилини. Знайти ймовірність того, що в дану мить годинник покаже час, що відрізняється від дійсного не більше ніж на 20 с.

5.33. Знайти дисперсію випадкової величини, розподіленої рівномірно в інтервалі (2; 8).

5.34. Дати визначення випадковим величинам, розподіленим за показовим законом.

5.35. Записати в загальному вигляді інтегральну функцію випадкової величини, розподіленої за показовим законом.

5.36. Навести формулу для обчислення математичного сподівання випадкової величини, розподіленої за показовим законом.

5.37. Навести формулу для обчислення дисперсії випадкової величини, розподіленої за показовим законом.

5.38. Навести формулу для обчислення середнього квадратичного відхилення випадкової величини, розподіленої за показовим законом.

5.39. Поставити знак відношення між першим початковим моментом випадкової величини та її математичним сподіванням.

5.40. Навести формулу для обчислення ймовірності влучення значення випадкової величини, розподіленої за показовим законом, в заданий діапазон [a, b], де a і b – невід’ємні величини.

5.41. Написати диференціальну та інтегральну функції показового розподілу, якщо параметр $\lambda = 5$.

5.42. Випадкова величина X підпорядкована показовому закону розподілу з параметром μ:

$$f(x) = \begin{cases} \mu\, e^{-\mu x} & \text{при} \quad x \geq 0; \\ 0 & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

Знайти інтегральну функцію розподілу й ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення менше, ніж її математичне сподівання.

5.43. Випадкова неперервна величина X розподілена за показовим законом, заданим щільністю розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 3\, e^{-3x} & \text{при} \quad x \geq 0; \\ 0 & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X потрапить до інтервалу (0,13; 0,7).

5.44. Знайти математичне сподівання випадкової величини X, розподіленої за показовим законом:

$$f(x) = \begin{cases} 5\, e^{-5x} & \text{при} \quad x \geq 0; \\ 0 & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

5.45. Студент пам'ятає, що диференціальна функція показового розподілу має вигляд

$$f(x)=\begin{cases} c\,e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x \ge 0; \\ 0 & \text{при} \quad x < 0, \end{cases}$$

але забув, чому дорівнює постійна c. Знайти константу c.

5.46. Записати в загальному вигляді інтегральну функцію нормально розподіленої випадкової величини.

5.47. Як визначаються основні числові характеристики нормально розподілених випадкових величин?

5.48. Навести рекурентне співвідношення для визначення центральних моментів нормально розподіленої випадкової величини.

5.49. Чому дорівнює коефіцієнт асиметрії нормально розподіленої випадкової величини?

5.50. Чому дорівнює коефіцієнт гостровершинності нормально розподіленої випадкової величини?

5.51. Навести формулу для обчислення ймовірності влучення значення випадкової величини, розподіленої за нормальним законом, в заданий діапазон $[a, b]$.

5.52. Нормально розподілена випадкова величина X задана щільністю розподілу ймовірності:

$$f(x)=\frac{1}{5\cdot\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{50}}.$$

Знайти математичне сподівання і дисперсію.

5.53. Математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини X відповідно дорівнюють 20 і 5. Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X прийме значення з інтервалу (15; 25).

5.54. Робиться зважування деякої речовини без систематичних помилок. Випадкові помилки зважування підпорядковані нормальному закону з середнім квадратичним відхиленням σ = 20 *г*. Знайти ймовірність того, що зважування буде зроблено з помилкою, що не перевершує за абсолютним значенням величину 10 *г*.

5.55. Бракування кульок для підшипників робиться в такий спосіб: якщо кулька не проходить через отвір діаметром d_1, але проходить через отвір діаметром $d_2 > d_1$, то її величина вважається прийнятною. Якщо яка-небудь умова не виконується, то кульку бракують. Відомо, що діаметр кульки D є нормально розподіленою випадковою величиною з характеристиками: $m_d = \frac{d_1 + d_2}{2}$, $\sigma_d = \frac{d_2 - d_1}{4}$. Визначити ймовірність того, що кульку буде забраковано.

5.56. У чому полягає правило трьох сигм?

5.57. Які випадкові величини розподілені за законом Пірсона?

5.58. Які випадкові величини розподілені за законом Ст'юдента?

5.59. Які випадкові величини розподілені за законом Фішера?

6. ВИПАДКОВІ ВЕКТОРИ І ФУНКЦІЇ ВИПАДКОВИХ АРГУМЕНТІВ

6.1. Випадкові вектори

Визначення 6.1. Випадковим вектором називають вектор $\mathbf{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$, компоненти якого є випадковими величинами.

Так само, як і для випадкової величини, для випадкового вектора вводяться поняття інтегральної функції розподілу й числові характеристики.

6.1.1. Інтегральна функція розподілу випадкового вектора

Визначення 6.2. Інтегральна функція розподілу випадкового вектора – це така функція $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, яка при конкретних значеннях своїх аргументів чисельно дорівнює ймовірності того, що випадкові компоненти вектора виявляться менше за відповідні аргументи, тобто $F(x_1,x_2,\ldots,x_n) = P\{X_1<x_1,\ X_2<x_2,\ \ldots,\ X_n<x_n\}$.

Надалі, як правило, будуть розглядатися тільки двовимірні випадкові вектори $\mathbf{Z} = (X,\mathrm{Y})$, де X,Y – компоненти вектора. Однак усі наведені положення або в однаковій мірі справедливі і для багатовимірних векторів, або легко узагальнюються на випадок багатовимірних векторів.

У загальному випадку інтегральна функція неперервного двовимірного випадкового вектора являє собою криволінійну поверхню $F(x,y)$, укладену між двома необмеженими площинами F_0 і F_1, обумовленими відповідно рівностями F=0 і F=1 (рис.6.1). Поверхня $F(x,y)$

асимптотично наближається до площини F_0, коли або $x \to -\infty$, або $y \to -\infty$, або одночасно $x \to -\infty$ і $y \to -\infty$. При одночасному виконанні умов $x \to \infty$ і $y \to \infty$ поверхня $F(x,y)$ асимптотично наближається до площини F_1.

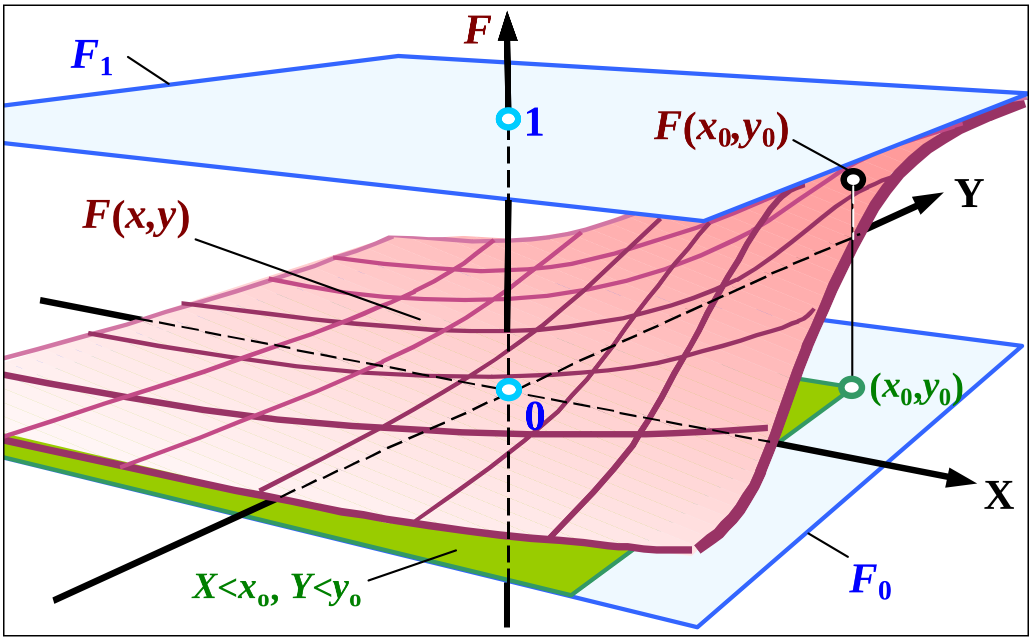


Рис.6.1

За визначенням інтегральна функція двовимірного випадкового вектора **Z** = (X,Y) – це така функція $F(x,y)$, яка при кожних конкретних значеннях своїх аргументів x і y чисельно дорівнює ймовірності того, що випадкові компоненти вектора виявляться менше за відповідні аргументи, тобто $F(x,y) = P\{X<x,\ Y<y\}$. Іншими словами, інтегральна функція двовимірного випадкового вектора в конкретній точці (x_0,y_0) дорівнює ймовірності влучення випадкового вектора на затінену ділянку площини координат $X0Y$ (див. рис.6.1 і 6.2).

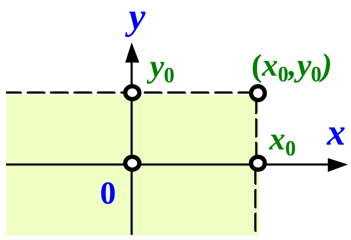


Рис.6.2

Інтегральна функція двовимірного випадкового вектора **Z** = (X,Y) має ряд властивостей, що формулюються в такий спосіб:

1-ша властивість

$$F(-\infty,-\infty)=0\,; \tag{6.1}$$

$$F(x,-\infty)=0\,; \tag{6.2}$$

$$F(-\infty,y)=0\,. \tag{6.3}$$

2-га властивість

$$F(\infty, \infty) = 1. \qquad (6.4)$$

3-тя властивість

$$F(x,\infty) = P\{X < x, Y < \infty\} = P\{X < x\} = F_1(x) \;; \qquad (6.5)$$

$$F(\infty, y) = P\{X < \infty, Y < y\} = P\{Y < y\} = F_2(y) \;. \qquad (6.6)$$

4-та властивість

$F(x,y)$ – функція, що не зменшується від обох своїх аргументів.

Урахування 3-ої властивості (6.5) – (6.6) дозволяє за відомою інтегральною функцією $F(x,y)$ визначати інтегральні функції розподілу компонент, тобто $F_1(x) = F(x,\infty)$; $F_2(y) = F(\infty, y)$.

Узагальнення 3-ої властивості на інтегральні функції тривимірних векторів і функції більшої вимірності дозволяє одержати вирази для визначення часткових інтегральних функцій. Так, для тривимірної інтегральної функції $F(x_1,x_2,x_3)$ справедливі вирази: $F_1(x_1) = F(x_1,\infty,\infty)$; $F_2(x_2) = F(\infty, x_2, \infty)$, $F_{2,3}(x_2, x_3) = F(\infty, x_2, x_3)$ і т.д.

6.1.2. Ймовірність влучення випадкового вектора в заданий діапазон

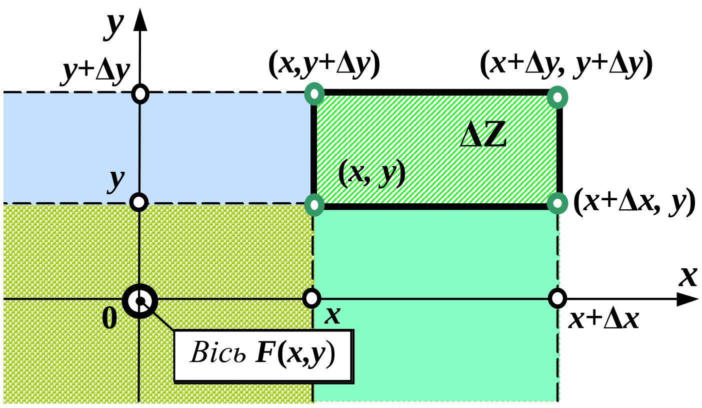


Рис.6.3

Ймовірність влучення дискретного або неперервного випадкового вектора в заданий діапазон (прямокутник) може бути визначена за допомогою однієї і тієї формули, заснованої на використанні інтегральної функції розподілу.

Нехай відома інтегральна функція $F(x,y)$ і задані параметри ділянки Δ**Z**, на яку з шуканою ймовірністю потрапляє випадковий вектор **Z** (див. рис.6.3), тобто задані координати кутів прямокутника Δ**Z.** Тоді шукана ймовірність

$$P\{(X,Y)\in \Delta\mathbf{Z}\}=F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x, y+\Delta y)-F(x+\Delta x, y)+F(x,y) . \quad (6.7)$$

6.1.3. Щільність розподілу випадкового вектора

Якщо компоненти випадкового вектора є неперервними величинами, то закон розподілу цього вектора може бути заданий у формі щільності розподілу (диференціальної функції розподілу).

Щільність розподілу випадкового вектора – це ліміт відношення ймовірності влучення випадкового вектора на нескінченно малу ділянку $\Delta\mathbf{Z}$ до площі цієї ділянки:

$$f(x,y)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to o}}\frac{P\{(X,Y)\in \Delta\mathbf{Z}\}}{\Delta x\cdot\Delta y}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to o}}\frac{F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x, y+\Delta y)-F(x+\Delta x, y)+F(x,y)}{\Delta x\cdot\Delta y},$$

тобто щільність розподілу двовимірного випадкового вектора являє собою другу часткову похідну від інтегральної функції

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}. \quad (6.8)$$

З (6.8) виходить, що при відомій щільності розподілу випадкового вектора інтегральна функція визначається за допомогою зворотного перетворення

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(t,\tau)\,dt\,d\,\tau. \quad (6.9)$$

Щільність розподілу випадкового вектора $f(x,y)$ успадковує всі властивості інтегральної функції $F(x,y)$. Так, наведені раніше 1-ша і 2-га властивості інтегральної функції (6.1) – (6.4) трансформуються в ***1-шу властивість щільності розподілу***

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy=1 ; \quad (6.10)$$

3-тя властивість (6.5) – (6.6) трансформується в ***2-гу властивість щільності розподілу***

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy ; \quad (6.11)$$

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx ; \quad (6.12)$$

4-та властивість – у ***3-тю властивість щільності розподілу***

$$f(x,y) \geq 0 \ . \qquad (6.13)$$

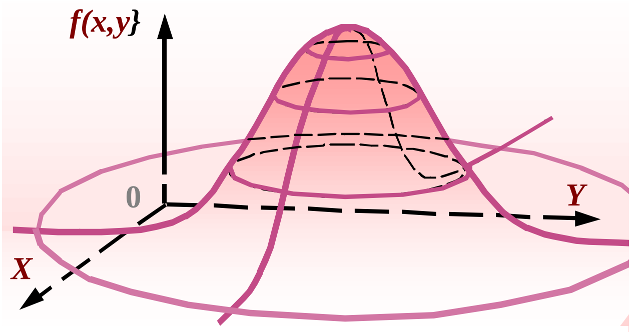


Рис.6.4

З геометричної точки зору перша властивість щільності розподілу (6.11) означає, що об'єм, укладений між поверхнею $f(x,y)$ і координатною площиною $X0Y$ (рис.6.4), дорівнює одиниці. Третя властивість (6.13) говорить про те, що поверхня $f(x,y)$ не може бути розташовувана нижче координатної площини $X0Y$.

6.1.4. Умовні закони розподілу

Визначення 6.3. ***Умовний закон розподілу*** у формі $f(x/y)$ або $F(x/y)$ – це закон розподілу випадкової величини X, обчислений за умови, що випадкова величин Y прийняла конкретне значення.

Визначення 6.4. Випадкові величини X і Y називаються ***незалежними***, якщо закон розподілу випадкової величини X не залежить від того, яке значення прийняла випадкова величина Y. У протилежному разі величини X і Y називаються ***залежними***.

Якщо випадкові величини X і Y є незалежними, то

$$f(x/y) = f(x) \quad \text{і} \quad f(y/x) = f(y) \ .$$

Якщо випадкові величини X і Y є залежними, то справедливо наступне співвідношення:

$$f(x,y) = f(x)*f(y/x) = f(y)*f(x/y) \ .$$

Звідки

$$f(y/x)=\frac{f(x,y)}{f(x)}=\frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy} \quad \text{і} \quad f(x/y)=\frac{f(x,y)}{f(y)}=\frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx}.$$

6.1.5. Числові характеристики випадкового вектора

Визначення 6.5. ***Математичне сподівання*** випадкового вектора $\mathbf{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ є такий невипадковий вектор $\mathbf{m}=(m_1,m_2,\ldots,m_n)$, компонентами якого є математичні сподівання відповідних компонент випадкового вектора $\mathbf{X}$.

Визначення 6.6. ***Дисперсія*** випадкового вектора $\mathbf{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ є такий невипадковий вектор $\mathbf{D}=(D_1,D_2,\ldots,D_n)$, компонентами якого є дисперсії відповідних компонент випадкового вектора $\mathbf{X}$.

Визначення 6.7. ***Кореляційним моментом*** k_{xy} двомірного випадкового вектора **Z**=(X,Y) називають другий змішаний центральний момент

$$k_{xy}=\mu_{11}=\mathrm{M}[(X\text{-}m_x)(Y\text{-}m_y)] .$$

Для *дискретних* випадкових величин кореляційний момент визначається за формулою

$$k_{xy}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i-m_x)(y_i-m_y)p_{ij} , \tag{6.14}$$

де $p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_i)$;

m_x – математичне сподівання компоненти X випадкового вектора **Z**;

m_y – математичне сподівання компоненти Y випадкового вектора **Z**;

n – кількість можливих значень компоненти X;

m – кількість можливих значень компоненти Y.

Для *неперервних* випадкових величин кореляційний момент визначається за формулою

$$k_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)(y-m_y)f(x,y)dxdy, \tag{6.15}$$

де $f(x,y)$ – щільність розподілу випадкового вектора **Z**.

Кореляційний момент характеризує ступінь розкиду випадкових величин навколо їх математичного сподівання, а також ступінь лінійної залежності між випадковими величинами X и Y .

Для характеристики тільки ступеня лінійної залежності між випадковими величинами X і Y використовується ***коефіцієнт кореляції***

$$r_{xy} = \frac{k_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}. \tag{6.16}$$

Значення коефіцієнта кореляції r_{xy} знаходиться в діапазоні від –1 до +1.

Якщо x і y є незалежними між собою величинами, то $r_{xy} = 0$.

Якщо x і y зв'язані *лінійною* залежністю $Y = aX + b$, то $r_{xy} = -1$ при $a < 0$ і $r_{xy} = 1$ при $a > 0$.

Для випадкового n-мірного вектора $\mathbf{X}=(X_1,X_2,\dots,X_n)$ задається n-мірна ***кореляційна матриця***

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1j} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2j} & \cdots & k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{i1} & k_{i2} & \cdots & k_{ij} & \cdots & k_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nj} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix},$$

де $k_{ij} = M[(X_i\text{-}m_i)\,(X_j\text{-}m_j)]$;

$k_{ii} = M[(X_i\text{-}m_i)^2] = D_i$ – дисперсія i-го компонента випадкового вектора **X**;

$k_{ij} = k_{ji}$.

Для аналізу ступеня лінійної залежності між компонентами випадкового вектора **X** використовується ***нормована кореляційна***

матриця **R**, елементами якої є коефіцієнти кореляції r_{ij} відповідних компонент вектора **X,**

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1j} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2j} & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{i1} & r_{i2} & \cdots & r_{ij} & \cdots & r_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nj} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix},$$

де $r_{ij} = \dfrac{k_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$; $r_{ii} = \dfrac{D_i}{\sigma_i^2} = 1$; $r_{ij} = r_{ji}$.

6.2. Функції випадкових аргументів

Розв'язання багатьох прикладних задач вимагає знання законів розподілу або числових характеристик різних випадкових величин. У деяких випадках експеримент з виявлення закону розподілу вимагає постановки коштовних або тривалих за часом експериментів, а в деяких випадках і самий експеримент поставити неможливо. Часто цей бар'єр легко можна подолати. Якщо випадкова величина, що нас цікавить, є функцією випадкового аргументу, то її числові характеристики і закон розподілу можуть бути визначені за відомими характеристиками і законом розподілу випадкового аргументу, а також вигляду функціональної залежності.

6.2.1. Числові характеристики функції випадкових аргументів

Нехай випадкова величина Y є функцією випадкових аргументів Y = $\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$... Нехай відомий закон розподілу g(y) функції випадкових аргументів. Тоді основні числові характеристики функції Y визначаються наступними виразами*:*

$$m_y = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot g(y)\, dy\,; \tag{6.17}$$

$$D_y = \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_y)^2\, g(y)\, dy\,. \tag{6.18}$$

Однак, як уже наголошувалось, для визначення числових характеристик зовсім не обов'язково знати закон розподілу g(y).

Нехай випадкова величина $Y=\varphi(X)$ є функцією випадкового дискретного аргументу X, для якого відомий закон розподілу у вигляді ряду розподілу

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

Тоді кожному значенню x_i можна поставити у відповідність значення $y_i=\varphi(x_i)$

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n
$y_i=\varphi(x_i)$	$\varphi(x_1)$	$\varphi(x_2)$	...	$\varphi(x_n)$

} ряд розподілу X

} ряд розподілу Y

У загальному випадку для $y_i=\varphi(x_i)$ остання таблиця не є рядом розподілу (у точному розумінні цього терміна), однак усі необхідні для такого ряду значення випадкової функції і відповідні ймовірності в ній є. Таким чином,

$$m_y = M[\varphi(x)] = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) p_i \,. \tag{6.19}$$

Аналогічно для випадкової неперервної величини

$$m_y = M[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx \,. \tag{6.20}$$

Для системи двох випадкових аргументів (6.19) і (6.20) матимуть відповідно вигляд:

$$m_z = M[\varphi(x,y)] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \varphi(x_i, y_i) p_{ij} \,;$$

$$m_z = M[\varphi(x,y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,y) f(x,y) dx dy \,.$$

У загальному випадку (система з двох і більше випадкових аргументів) (6.19) і (6.20) матимуть відповідно вигляд:

$$m_y = M[\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)] = \sum_{i=1}^{n} \cdots \sum_{j=1}^{n} \varphi(x_1, x_2, ..., x_n) p_{i_1 i_2 ... i_n} \text{;}$$

$$m_y = M[\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_2, ..., x_n) f(x_1, x_2, ..., x_n) dx_1 dx_2 ... dx_n \text{.}$$

Таким чином, математичне сподівання функції будь-якого числа випадкових аргументів може бути знайдене без знання закону розподілу g(y).

Аналогічно можуть бути знайдені будь-які інші числові характеристики (моменти) функції випадкових аргументів. Наприклад, дисперсії

$$D_y = D[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\varphi(x) - m_y\right]^2 f(x) dx \text{,}$$

$$D_z = D[\varphi(x,y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\varphi(x,y) - m_y\right]^2 f(x,y) dx dy \text{,}$$

$$D_y = D[\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) - m_y]^2 f(x_1, x_2, ..., x_n) dx_1 dx_2 ... dx_n \text{.}$$

6.2.2. Теореми про числові характеристики функції випадкових аргументів

У багатьох випадках для знаходження числових характеристик функції випадкових аргументів не потрібно навіть знання закону розподілу випадкових аргументів. В основному це стосується лінійних і деяких елементарних нелінійних функцій.

Розглянемо обчислення математичного сподівання і дисперсії для найпростіших функцій випадкових аргументів.

Теорема 6.1. Математичне сподівання невипадкової величини c (константи) дорівнює самій невипадковій величині:

$$M[c] = c \text{.} \tag{6.21}$$

Доведення: $M[c] = \sum_{i=1}^{n} x_i \, p_i = c \cdot 1 = c$.

Теорема 6.2. Дисперсія невипадкової величини *c* дорівнює нулю:

$$D[c] = 0\,. \tag{6.22}$$

Доведення: $D[c] = M\left[(x_i - m_x)^2\right] = M\left[(c-c)^2\right] = M\left[0^2\right] = M[0] = 0\,.$

Теорема 6.3. Математичне сподівання добутку невипадкової величини *c* і випадкової величини X дорівнює добутку невипадкової величини *c* і математичного сподівання випадкової величини X:

$$M[cX] = cM[X]\,. \tag{6.23}$$

Доведення: $M[cX] = \sum_{i=1}^{n} cx_i = c\sum_{i=1}^{n} x_i = cM[X]\,.$

Теорема 6.4. Дисперсія добутку невипадкової величини c і випадкової величини X дорівнює добутку квадрата невипадкової величини c і дисперсії випадкової величини X:

$$D[cX] = c^2D[X]\,. \tag{6.24}$$

Доведення:

$$D[cX] = M\left[(cx - m_{cx})^2\right] = M\left[(cx - cm_x)^2\right] = M\left[c^2(x-m_x)^2\right] = c^2M\left[(x-m_x)^2\right] = c^2D[X]\,.$$

***Наслідок теореми* 6.3**:

$$\sigma[cX] = \sqrt{D[cX]} = \sqrt{c^2D[X]} = |c|\cdot\sigma_x\,. \tag{6.25}$$

Теорема 6.5. Математичне сподівання суми випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань:

$$M[X+Y] = M[X] + M[Y]\,. \tag{6.26}$$

Доведення:

$$M[X+Y]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)dxdy+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yf(x,y)dxdy=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy\right\}dx+\int_{-\infty}^{\infty}y\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx\right\}dy=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x)dx+\int_{-\infty}^{\infty}y\cdot f(y)dy=M[X]+M[Y].$$

Теорема 6.5 справедлива як для залежних, так і незалежних випадкових величин X і Y. Теорема 6.5 має також узагальнення на випадок суми декількох випадкових величині, тобто математичне сподівання суми n випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань:

$$M\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=\sum_{i=1}^{n}M[X_i]. \qquad (6.27)$$

Теорема 6.6. Математичне сподівання лінійної функції від n випадкових аргументів X_i $(i=1,2,\ldots,n)$ дорівнює цій же лінійній функції від математичних сподівань випадкових величин X_i:

$$M[Y]=M\left[\sum_{i=1}^{n}a_iX_i+b\right]=\sum_{i=1}^{n}a_iM[X_i]+b. \qquad (6.28)$$

Доведення. Твердження (6.28) очевидне з погляду на теореми 6.3, 6.5 і 6.1.

Теорема 6.7. Дисперсія суми випадкових величин X і Y дорівнює сумі їх дисперсій, збільшеній на подвоєний кореляційний момент цих же величин:

$$D[X+Y]=D[X]+D[Y]+2k_{xy}. \qquad (6.29)$$

Доведення:

$$D[X+Y]=M\left[\left((x+y)-m_{x+y}\right)^2\right]=M\left[\left(x+y-m_x-m_y\right)^2\right]=$$

$$=M\left[(x-m_x)^2+2(x-m_x)(y-m_y)+(y-m_y)^2\right]=$$

$$=M\left[(x-m_x)^2\right]+M\left[(y-m_y)^2\right]+2M\left[(x-m_x)(y-m_y)\right]=D[X]+D[Y]+2k_{xy}.$$

***Наслідок теореми* 6.7.** Дисперсія суми незалежних величин дорівнює сумі їх дисперсій:

$$D[X+Y] = D[X] + D[Y] \; , \tag{6.30}$$

оскільки $k_{xy} = 0$.

Теорема 6.8. Дисперсія лінійної функції n випадкових незалежних аргументів X_i $(i=1,2,\ldots,n)$ визначається за формулою

$$D[Y] = D\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D[X_i]. \tag{6.31}$$

Доведення. Формула (6.31) очевидна з погляду на теореми 6.4, 6.7 і 6.2.

Теорема 6.9. Математичне сподівання добутку випадкових величин X і Y визначається за формулою

$$M[XY] = M[X] * M[Y] + k_{xy} \, . \tag{6.32}$$

Доведення:

$$k_{xy} = M[(X–m_x)(Y–m_y)] = M[XY] – mx[Y] – my[X] + m_x m_y] =$$

$$=M[XY] – m_x m_y – m_x m_y + m_x m_y = M[XY] – m_x m_y \, .$$

Звідки $M[XY] = M[X]*M[Y] + k_{xy}$.

***Наслідок теореми* 6.9.** Математичне сподівання добутку незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань:

$$M[XY] = M[X] * M[Y] \, , \tag{6.33}$$

оскільки $k_{xy} = 0$.

Теорема 6.10. Дисперсія добутку незалежних випадкових величин X і Y визначається за формулою:

$$D[XY] = D[X] * D[Y] + m_y^2\, D[X] + m_x^2\, D[Y]\ . \tag{6.34}$$

Доведення:

$$D[XY] = M[(xy - m_{xy})^2] = M[(xy - m_x\, m_y)^2] = M[x^2 y^2] - 2m_x m_y\, M[xy] + m_x^2\, m_y^2 =$$

$$= M[x^2]*M[y^2] - 2\, m_x m_y m_x m_y + m_x^2\, m_y^2 = M[x^2]*M[y^2] - m_x^2\, m_y^2 =$$

$$= (D[X] + m_x^2)\,(D[Y] + m_y^2) - m_x^2\, m_y^2 = D[X] * D[Y] + m_y^2\, D[X] + m_x^2\, D[Y]\ .$$

***Наслідок теореми* 6.10.** При $m_x = 0$ і $m_y = 0$

$$D[XY] = D[X] * D[Y]\ . \tag{6.35}$$

6.2.3. Закон розподілу функції випадкових аргументів

В багатьох стохастичних задачах часто виникає необхідність визначити закон розподілу функції випадкового аргументу при відомому законі розподілу випадкового аргументу. Розглянемо таку задачу для монотонних функцій випадкового аргументу.

Нехай є випадкова неперервна величина X, яка розподілена в інтервалі (a,b) з щільністю розподілу $f(x)$. Нехай інша випадкова величина Y пов'язана з X функціональною залежністю $Y = \varphi(X)$. При цьому функція $\varphi(X)$ – функція монотонно ***зростаюча*** на інтервалі (a,b), неперервна і має перші похідні (рис.6.5). Потрібно знайти щільність розподілу $g(x)$ випадкової величини Y.

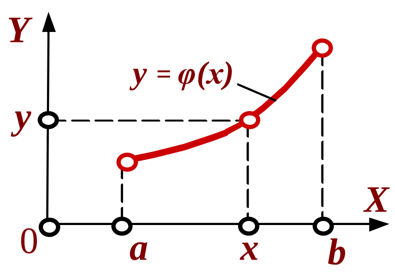


Рис.6.5

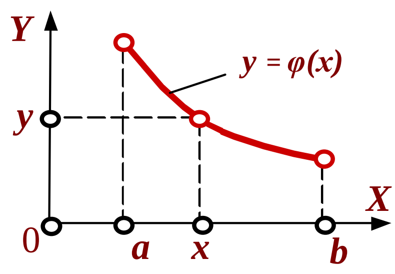


Рис.6.6

Відповідно до *визначення 4.5* знайдемо інтегральну функцію випадкової величини Y

$$G(y) = P\{Y < y\} = P\{a < X < x\} = \int_a^x f(x)dx \, .$$

Визначимо x через y: $x = \varphi^{-1}(y)$, де φ^{-1} – функція, зворотна до функції φ. Тоді

$$G(y) = \int_a^{\varphi^{-1}(y)} f\left[\varphi^{-1}(y)\right] \cdot \left[\varphi^{-1}(y)\right]' dy \, .$$

Оскільки щільність розподілу $g(x)$ є похідною від інтегральної функції, то

$$g[y] = G'(y) = f\left[\varphi^{-1}(y)\right] \cdot \left[\varphi^{-1}(y)\right]' \, . \tag{6.36}$$

Нехай тепер функція $\varphi(X)$ – функція монотонно ***убутна*** на інтервалі (a,b), неперервна і має перші похідні (рис.6.6). Тоді

$$G(y) = P\{Y < y\} = P\{x < X < b\} = \int_x^b f(x)dx \, .$$

Визначимо x через y, тобто

$$G(y) = \int_{\varphi^{-1}(y)a}^{b} f\left[\varphi^{-1}(y)\right] \cdot \left[\varphi^{-1}(y)\right]' dy \; = -\int_b^{\varphi^{-1}(y)} f\left[\varphi^{-1}(y)\right] \cdot \left[\varphi^{-1}(y)\right]' dy \, ,$$

або

$$g[y] = G'(y) = -f\left[\varphi^{-1}(y)\right] \cdot \left[\varphi^{-1}(y)\right]' \, . \tag{6.37}$$

Враховуючи (6.36) і (6.37), узагальнена формула для щільності розподілу монотонної функції випадкового аргументу прийме остаточний вигляд:

$$g[y] = G'(y) = f\left[\varphi^{-1}(y)\right] \cdot \left| \left[\varphi^{-1}(y)\right]' \right| . \qquad (6.38)$$

Дійсно, якщо $\varphi(x)$ – зростаюча функція, то похідна $\varphi'(x)$ позитивна, звідки похідна $\left[\varphi^{-1}(y)\right]'$ теж позитивна. Якщо $\varphi(x)$ – убутна функція, то похідна $\varphi'(x)$ негативна, звідки похідна $\left[\varphi^{-1}(y)\right]'$ теж негативна. Але знак «–» у (6.37) робить результат позитивним. Отже узагальнена формула щільності розподілу (6.38) справедлива в обох випадках.

6.3. Практикум і запитання для самоконтролю

6.1. Дати визначення поняття "випадковий вектор".

6.2. Дати визначення поняття "інтегральна функція розподілу випадкового вектора".

6.3. Які властивості має інтегральна функція розподілу випадкового вектора?

6.4. Написати вираз для обчислення ймовірності влучення двовимірного випадкового вектора (X,Y) на задану прямокутну ділянку при відомій інтегральній функції $F(x,y)$, якщо лівий нижній кут ділянки має координати (x_1,y_1), а верхній правий – (x_2,y_2).

6.5. Дати математичне визначення щільності розподілу двовимірного випадкового вектора?

6.6. Навести формулу для зворотного перетворення щільності розподілу двовимірного випадкового вектора в інтегральну функцію.

6.7. Що з геометричної точки зору означає 1-ша властивість щільності розподілу двовимірного випадкового вектора?

6.8. Сформулювати 2-гу властивість щільності розподілу двовимірного випадкового вектора.

6.9. Що з геометричної точки зору означає 3-тя властивість щільності розподілу двовимірного випадкового вектора?

6.10. Довести 2-гу властивість щільності розподілу двовимірного випадкового вектора.

6.11. Дати визначення поняття "умовний закон розподілу" для двовимірного випадкового вектора.

6.12. Які випадкові величини є незалежними?

6.13. Задано закон розподілу випадкового вектора $f(x_1,x_2,x_3)$. Знайти $F(x_1,x_2,x_3)$, $F(x_1)$, $f(x_2,x_3)$, $f(x_2)$, $f(x_1/x_2,x_3)$, $f(x_1,x_3/x_2)$.

6.14. Дати визначення поняття "математичне сподівання випадкового вектора".

6.15. Дати визначення поняття "дисперсія випадкового вектора".

6.16. Дати визначення поняття "кореляційний момент двовимірного випадкового вектора".

6.17. Навести формули для визначення кореляційного моменту двовимірного випадкового вектора $Z = (X,Y)$ у випадку неперервних і дискретних компонент.

6.18. Що характеризує кореляційного момент двовимірного випадкового вектора?

6.19. Що характеризує коефіцієнт кореляції?

6.20. Навести формулу для розрахунку коефіцієнта кореляції.

6.21. Які значення може набувати коефіцієнт кореляції?

6.22. Чому дорівнює коефіцієнт кореляції випадкових величин X і Y, які пов'язані лінійною залежністю $X = 3Y - 5$?

6.23. Чому дорівнює коефіцієнт кореляції випадкових величин X і Y, які пов'язані лінійною залежністю $X = -5Y + 2$?

6.24. Сформулювати теорему про математичне сподівання невипадкової величини.

6.25. Сформулювати теорему про дисперсію невипадкової величини.

6.26. Чи можна постійний коефіцієнт при випадковій величині виносити за знак математичного сподівання?

6.27. Чи можна постійний коефіцієнт при випадковій величині виносити за знак дисперсії?

6.28. Сформулювати теорему про математичне сподівання суми випадкових величин.

6.29. Чому дорівнює математичне сподівання лінійної функції?

6.30. Сформулювати теорему про дисперсію суми двох випадкових величин.

6.31. Чому дорівнює дисперсія суми двох незалежних випадкових величин?

6.32. Чому дорівнює дисперсія лінійної функції?

6.33. Сформулювати теорему про математичне сподівання добутку двох випадкових величин.

6.34. Чому дорівнює математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин?

6.35. Як обчислюється дисперсія добутку двох незалежних величин?

7. ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ

7.1. Закон великих чисел

7.1.1. Теорема Бернуллі

Якщо проводиться n незалежних випробувань, у кожному з яких випадкова подія A з'являється з імовірністю $P(A) = p$, то відносна частота μ/n появи події A (μ – число появ A) при великому n приблизно дорівнює ймовірності p:

$$\frac{\mu}{n} \approx p\ .$$

Наведене твердження можна уточнити в такий спосіб: $\frac{\mu}{n} \to p$ при $n \to \infty$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ і для досить великих n співвідношення

$$\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \varepsilon \qquad (7.1)$$

виконується з імовірністю, що прямує до 1 з ростом n. Математичний запис даного твердження має вигляд

$$P\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \to 1, \quad \text{якщо} \quad n \to \infty\ . \qquad (7.2)$$

Вираз (7.2) є формальним змістом *теореми Бернуллі*, відомої як *закон великих чисел*.

Теорема 7.1 (теорема Бернуллі). З імовірністю, як завгодно близькою до 1, очікується, що при досить великій кількості випробувань відносна частота появи події буде як завгодно мало відрізнятися від її ймовірності.

Зауважимо, що теорема не стверджує, що співвідношення (7.1) вірогідно, однак, якщо число n досить велике, то ймовірність виконання (7.1) близька до 1 (наприклад, 0.98 або 0.999), що **практично вірогідно.** Іншими словами, якщо проводиться експеримент, що складається з досить великого числа n випробувань, то можна бути впевненим, що співвідношення (7.1) буде виконано.

Примітка. Автори рекомендують читачеві перевірити останнє твердження за допомогою експерименту з киданням монети (подія A – випадіння «орла») або киданням гральної кістки (подія A – випадіння парного числа).

7.1.2. Закон великих чисел у формі Чебишова

7.1.2.1. Нерівність Чебишова

Нерівність Чебишова. При будь-якому ε>0

$$P\left(\left|\xi - M[\xi]\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D[\xi]}{\varepsilon^2}, \qquad (7.3)$$

тобто абсолютне відхилення випадкової величини від її математичного сподівання більше або дорівнює ε з імовірністю, не більшою за відношення дисперсії цієї випадкової величини до квадрата ε.

З нерівності (7.3) виходить закон великих чисел у формі Чебишова.

7.1.2.2. Теорема Чебишова

Одне з основних тверджень закону великих чисел полягає в тому, що значення середньоарифметичного $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ випадкових величин з рівними математичними сподіваннями $M[\xi_i] = a$ при великому n виявляється приблизно рівним a:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \approx a \ .$$

Надалі будемо говорити, що $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \to a$ при $n \to \infty$, якщо для будь-якого ε > 0 і досить великих n співвідношення

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - a\right| < \varepsilon \qquad (7.4)$$

виконується з імовірністю, що прямує до одиниці з ростом *n*. Дане висловлення записується в такий спосіб:

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - a\right| < \varepsilon\right\} \to 1, \quad \text{якщо} \quad n \to \infty .$$

Це одне з тверджень закону великих чисел. Зауважимо, як і теорема Бернуллі, воно не означає, що співвідношення (7.4) вірогідне. Однак, якщо *n* досить велике, то ймовірність його виконання близька до 1, наприклад, 0.98 або 0.999, що означає його **практичну вірогідність.** Наведемо повне формулювання однієї з теорем закону великих чисел – *теорему Чебишова*.

Теорема 7.2 (*теорема Чебишова*). Якщо $\xi_1,..,\xi_n,..$ – послідовність попарно незалежних випадкових величин, що мають кінцеві дисперсії та обмежені однією і тією ж постійною: $D[\xi_1] < c, \quad D[\xi_2] < c, \quad \ldots, \quad D[\xi_n] < c,$ то для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\mathrm{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[\xi_i]\right| < \varepsilon\right\} \to 1, \quad \text{якщо} \quad n \to \infty .$$

7.1.2.3. Перевірка закону великих чисел

Перевірка співвідношення (7.4) за допомогою різних експериментів, як правило, приводить до позитивного результату, тобто до його виконання. Однак слід звернути увагу на наявні випадки порушення закону великих чисел.

Розглянемо випадкову величину, яка розподілена за законом Коші з щільністю

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2} . \qquad (7.5)$$

Зауважимо, що щільність симетрична відносно нуля, однак 0 не є математичним сподіванням. Цей розподіл не має математичного сподівання. Нагадаємо, що математичним сподіванням є $\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$, якщо

$\int_{-\infty}^{\infty} |x| p(x) dx < \infty$. Але остання нерівність для розподілу Коші не виконується. Як наслідок, для послідовності незалежних випадкових величин, розподілених за законом Коші (7.5), закон великих чисел не виконується. Якби середньоарифметичне $\bar{\xi}_n \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ сходилося з ростом n до якої-небудь константи, то, з огляду на симетрію розподілу, такою константою міг бути тільки 0. Однак 0 не є точкою збіжності. Дійсно, можна показати, що при будь-якому ε >0 і при будь-якому як завгодно великому n

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right| > \varepsilon \tag{7.6}$$

з імовірністю $P = 1 - \frac{2}{\pi}\text{arctg}\,\varepsilon$.

Пояснимо сказане: можна показати, що середньоарифметичне $\bar{\xi}_n$ розподілено за законом (7.5), а функція розподілу для (7.5) є arctg x. Ця ймовірність, як видно, не прямує до 0 з ростом n. Наприклад, якщо ε = 0.03, то ймовірність виконання (7.6) дорівнює приблизно $P \approx 0.98$, тобто подія (7.6) практично вірогідна, і можна впевнено очікувати її виконання з одного разу. Якщо ε=1, то ймовірність (7.6) дорівнює 0.5, і виконання його хоча б один раз можна впевнено очікувати, зробивши 7 експериментів (тому що ймовірність невиконання жодного разу дорівнює $(0.5)^7 = 1/128$). І це при будь-якому фіксованому n, наприклад, n = 200. Експериментальна перевірка (рис.7.1) підтверджує сказане.

Слід звернути увагу на те, що є рідкі спостереження, які відстоять дуже далеко від центру розподілу – точки 0.

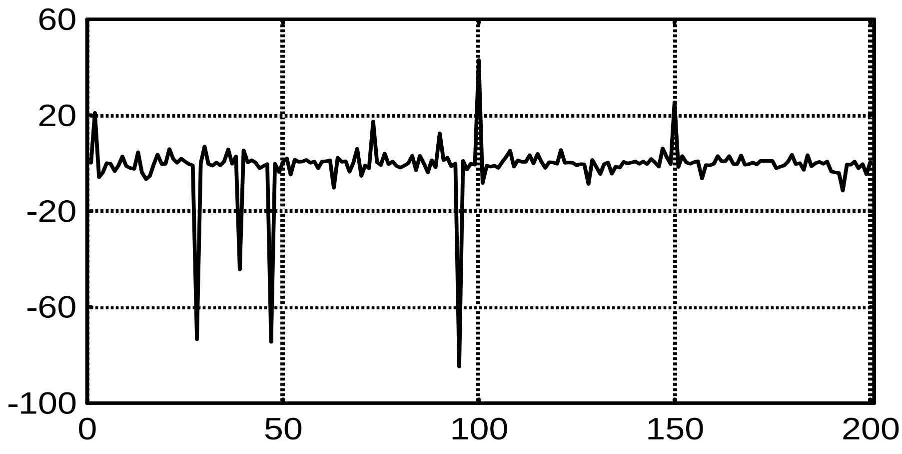


Рис.7.1 – Вибірка спостережень, розподілених за законом Коші (n = 200)

7.1.2.4. Стиск розподілу з ростом числа доданків

Закон великих чисел у формі Чебишова означає, що розподіл випадкової величини

$$\bar{\xi}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$$

стискується з ростом n. Якщо математичні сподівання однакові, тобто $M\xi_i = a$, то стиск відбувається навколо точки a.

Переконатися в стиску можна, спостерігаючи гістограми при різних значеннях n (наприклад, для n =10, 40, 160, 640). Згенеруємо k разів (наприклад, k =20) випадкову величину $\bar{\xi}_n \equiv \bar{\xi}: \ \bar{x}_1,..,\bar{x}_k$ і побудуємо для кожної такої вибірки середніх гістограму. Порівнюючи гістограми для різних n, можна легко помітити стиск (табл.7.1 і рис.7.2).

Таблиця 7.1. Розсіяння середніх

n	$\bar{x}$ min	$\bar{x}$ max	w
10	0.371	0.687	0.32
40	0.418	0.606	0.19
160	0.472	0.550	0.08
320	0.523	0.469	0.05

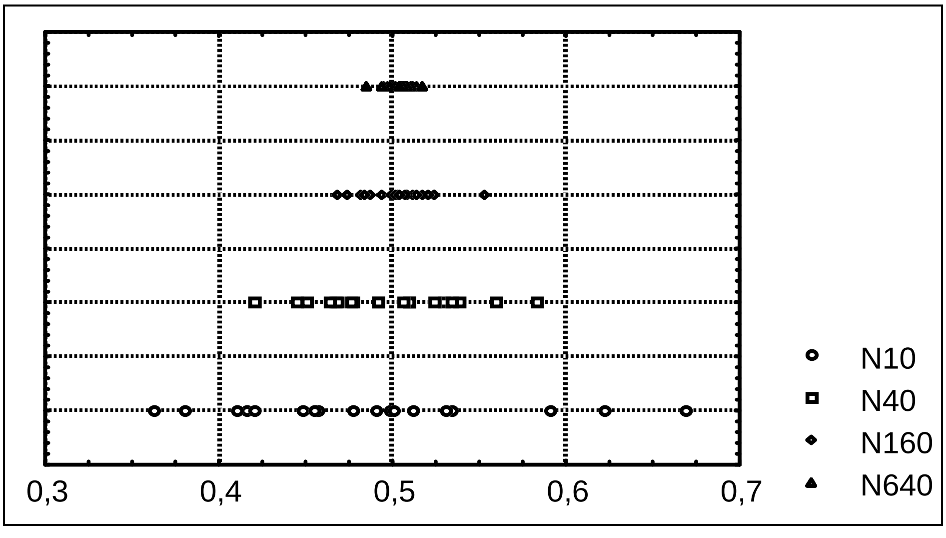


Рис.7.2 – Гістограми розсіяння середніх при різних n

7.2. Посилений закон великих чисел.

7.2.1. Теорема Бореля

Теорема 7.3 (*теорема Бореля*). Відносна частота $f_n \equiv \dfrac{\mu_n}{n}$ появи випадкової події A з ростом числа n незалежних випробувань прямує до дійсної ймовірності p події A

$$\frac{\mu_n}{n} \to p \tag{7.7}$$

з імовірністю 1.

Іншими словами, при будь-якому експерименті з нескінченним числом випробувань має місце збіжність послідовності f_n до p. У справедливості сказаного можна переконатися за допомогою експерименту з кидання монети або гральної кістки. В останньому випадку для спрощення і прискорення експерименту слід розглядати подію A_1 (поява непарного числа очок) або A_2 (поява парного числа очок).

На рис.7.3 наведені три графіки відносних частот f_n випадіння герба при киданні монети, отриманих у результаті натурних випробувань при n=50; на рис.7.4 – при n=500.

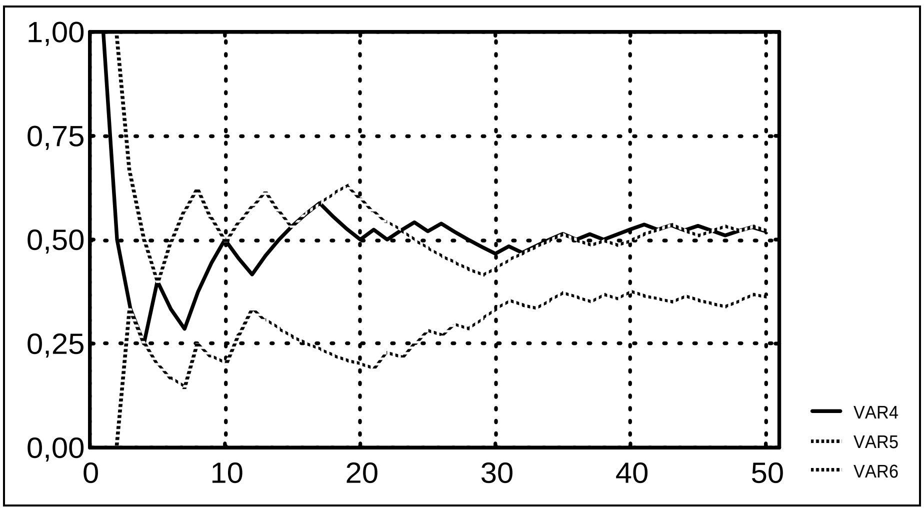


Рис.7.3 – Відносна частота випадіння герба при зміні n від 1 до 50

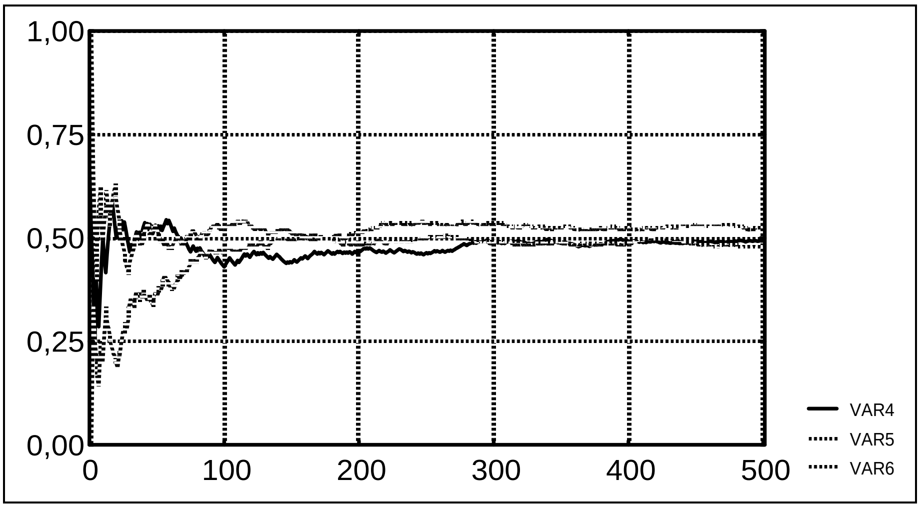


Рис.7.4 – Відносна частота випадіння герба при зміні *n* від 1 до 500

Графіки переконливо свідчать про прямування відносних частот до дійсної ймовірності 0,5. Причому чим більша кількість випробувань, тим більш очевидне наближення f_n до p.

Будемо говорити, що послідовність випадкових величин $\xi_1, \xi_2, .., \xi_n$ підкоряється посиленому закону великих чисел, якщо за умову $n \to \infty$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M[\xi_i] \to 0 \tag{7.8}$$

з імовірністю 1.

В окремому випадку, при рівних математичних сподіваннях, $M[\xi_i]=a$, це означає

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \to a\,,\ \text{якщо } n \to \infty \tag{7.9}$$

з імовірністю 1.

На рис.7.5 наведені графіки результатів трьох експериментів з відстеження послідовностей середніх арифметичних випадкових величин ξ_i, рівномірно розподілених в інтервалі (0;1), коли i змінюється від 1 до 50; на рис.7.6 – від 1 до 500. Графіки переконливо демонструють прямування середніх арифметичних до математичного сподівання 0.5 з ростом n.

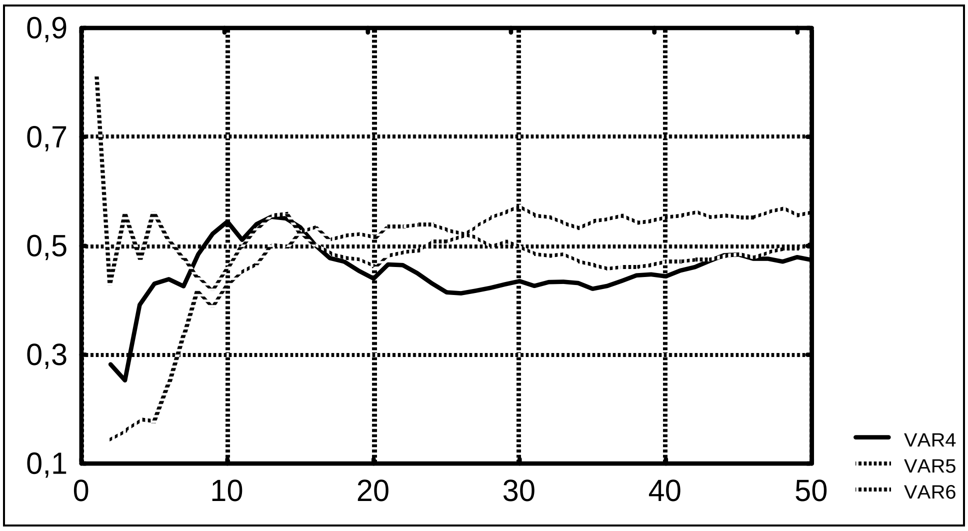


Рис.7.5 – Графіки середніх арифметичних для рівномірно розподілених випадкових величин на інтервалі (0; 1) залежно від їх кількості ($i = \overline{1,50}$)

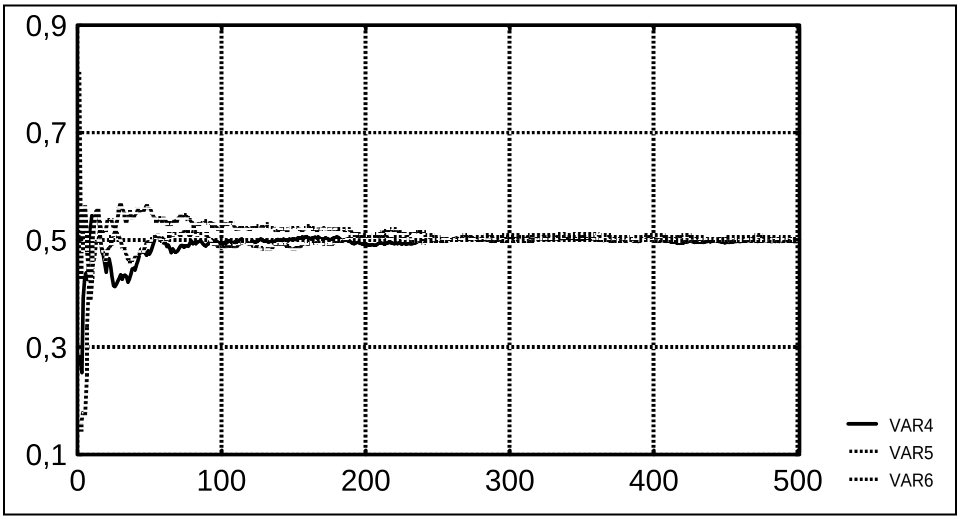


Рис.7.6. – Графіки середніх арифметичних для рівномірно розподілених випадкових величин на інтервалі (0; 1) залежно від їх кількості ($i = \overline{1,500}$)

Достатню умову виконання (7.8) дає *теорема Колмогорова*.

7.2.2. Теорема Колмогорова

Теорема 7.4 (*теорема Колмогорова*). Якщо послідовність взаємно незалежних випадкових величин $\xi_1,..,\xi_n,..$ задовольняє умові

$$\frac{1}{n^2}\sum_{n=0}^{\infty} D[\xi_n] < \infty,$$

то вона підкоряється посиленому закону великих чисел.

Для незалежних і однаково розподілених випадкових величин теорема Колмогорова трансформується в більш просту теорему.

Теорема 7.5 (*теорема Колмогорова у спрощеному трактуванні*). Необхідною і достатньою умовою для застосовності посиленого закону великих чисел до послідовності незалежних величин є існування математичного сподівання.

7.2.3. Основна теорема статистики

Нехай $x_1, x_2,...,x_n$ – вибірка з n незалежних спостережень над випадковою величиною X з теоретичною (дійсною, справжньою) функцією розподілу $F(x)$. Розташуємо спостереження в порядку зростання; одержимо варіаційний ряд $x_{(1)} \le x_{(2)} \le ... \le x_{(n)}$.

Визначимо функцію емпіричного розподілу

$$F_n^*(x) \equiv F_n^*(x : x_1, x_2,..., x_n) = \frac{\mu_n(x)}{n} ,$$

де $\mu_n(x)$ – число тих спостережень, для яких $x_i<x$. Ясно, що $F_n^*(x)$ – східчаста функція; що утворюється, якщо значенням $x_1,...,x_n$ надати ймовірності, рівні $1/n$. До того ж, $F_n^*(x)$ – функція випадкова, тому що залежить від спостережень $x_1,...,x_n$.

Теорема 7.6 (*теорема Глівенко – основна теорема статистики*). З ростом n максимальне абсолютне відхилення емпіричної функції розподілу від теоретичної (дійсної) прямує до нуля з імовірністю 1:

$$P\left(\sup_x | F_n^*(x) - F(x) | \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0 \right) = 1 .$$

Проілюструємо цю теорему на прикладах спостережень випадкової величини X, розподіленої за рівномірним законом на інтервалі (0; 1), при числі випробувань n=10 (рис.7.7), n=40 (рис.7.8) і n=160 (рис.7.9) .

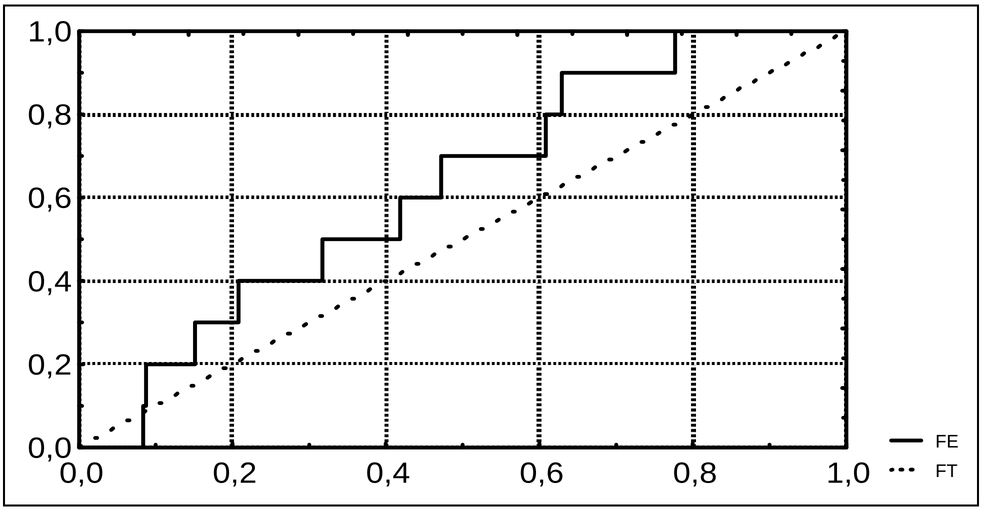


Рис.7.7 – Функції емпіричного FE і теоретичного FT розподілів рівномірно розподіленої випадкової величини X при числі спостережень n=10

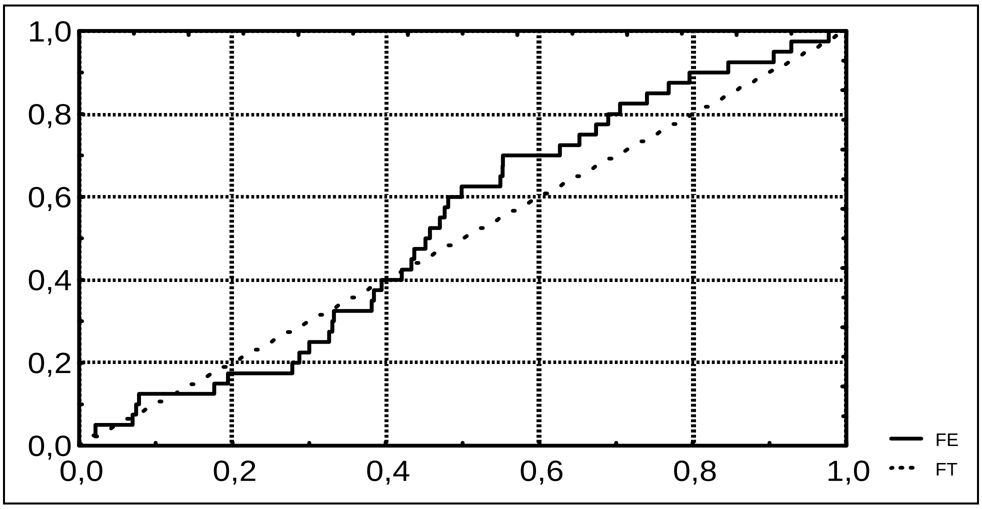


Рис.7.8 – Функції емпіричного FE і теоретичного FT розподілів рівномірно розподіленої випадкової величини X при числі спостережень n=40

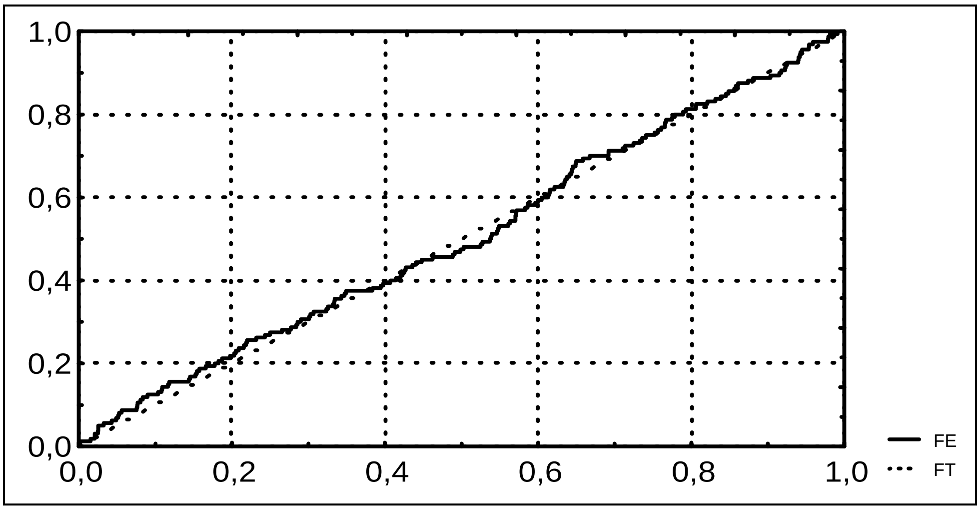


Рис.7.9 – Функції емпіричного FE і теоретичного FT розподілів рівномірно розподіленої випадкової величини X при числі спостережень n=160

7.3. Центральна гранична теорема

7.3.1. Зміст центральної граничної теореми

Закон великих чисел стверджує, що при $n \to \infty$ середньоарифметичне випадкових величин ξ_i з рівними математичними сподіваннями прямує до їх математичного сподівання

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \to a\,,$$

де $a = M[\xi_i]$.

Центральна гранична теорема стверджує дещо більше, а саме, що при $n \to \infty$ розподіл середньоарифметичного випадкових величин (за багаторазовим підсумовуванням середньоарифметичне є випадкова величина) наближається до нормального з параметрами a (математичне сподівання) і σ^2/n (дисперсія) :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \sim N(a, \frac{\sigma^2}{n})\,, \tag{7.10}$$

де $\sigma^2 = D[\xi_i]$.

При нормуванні суми гранична теорема записується в такий спосіб:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i - na}{\sigma\sqrt{n}} \sim N(0,1)\ .$$

Наведемо формулювання центральної граничної теореми у формі Ліндеберга.

7.3.2. Теорема Ліндеберга

Теорема 7.7 (*теорема Ліндеберга*). Якщо послідовність взаємно незалежних випадкових величин ξ_1, ξ_2,..., ξ_n,... при будь-якому постійному $\tau>0$ задовольняє *умові Ліндеберга*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x-a_k|>\tau B_n}(x-a_k)^2\,dF_k(x) = 0\,, \tag{7.11}$$

де $a_k = M[\xi_k]$, $B_n^2 = D\left[\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right]$, то при $n \to \infty$

$$P\left\{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k - a_k)}{\sqrt{D\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k\right]}} < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz\,, \qquad (7.12)$$

тобто нормована сума випадкових величин ξ_1, ξ_2,..., ξ_n розподілена за нормальним законом з параметрами 0 (математичне сподівання) і 1 (дисперсія) .

7.3.3. Теорема Ляпунова

Умова Ліндеберга (7.11) досить універсальна, але незручна при практичній перевірці. Замість неї доцільно використовувати *умову Ляпунова*: при деякому $\delta > 0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^{2+\delta}}\sum_{k=1}^{n} M\left[\left|\xi_k - a_k\right|^{2+\delta}\right] = 0\,. \qquad (7.13)$$

Для нормованих величин умова Ляпунова має вигляд

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} M\left[\left|\alpha_k\right|^{2+\delta}\right] = 0\,. \qquad (7.14)$$

Теорема 7.8 (***теорема Ляпунова – центральна гранична теорема у формі Ляпунова***). Якщо $s_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ – сума незалежних випадкових величин, $A_n = M[s_n]$, $B_n^2 = D[s_n]$ і виконується умова (7.13), то розподіл випадкової величини s_n наближається до нормального з параметрами A_n і B_n^2.

На практиці частіше використовується умова Ляпунова

а) при $\delta=1$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^3}\sum_{k=1}^{n} M\left[\left|\xi_k - a_k\right|^{3}\right] = 0\,;$$

б) при δ=2:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^4}\sum_{k=1}^{n}M\left[\left|\xi_k-a_k\right|^4\right]=0\,.$$

7.3.4. Сума однаково розподілених доданків

Центральним граничним теоремам підпорядковані послідовності випадкових величин з різними законами розподілу. На практиці частіше має місце більш простий випадок – послідовності випадкових величин з однаковими законами розподілу або послідовності реалізацій однієї і тієї ж випадкової величини.

Наслідок центральної граничної теореми. Якщо незалежні випадкові величини ξ_1, ξ_2, ... , ξ_n однаково розподілені і мають кінцеву відмінну від нуля дисперсію, то виконується (7.12) і (7.13). При цьому розподіл суми $s_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ з ростом n наближається до нормального з параметрами $A_n = M[s_n]$, $B_n^2 = D[s_n]$.

Переконаємося статистично в тому, що сума декількох випадкових величин розподілена приблизно за нормальним законом. Зробимо це на прикладі суми

$$S=\sum_{k=1}^{m}x_k \qquad (7.15)$$

шести *(m* = 6) незалежних випадкових величин, що мають *beta*-розподіл з параметрами *a=b=0.5*, тобто з щільністю розподілу

$$p(x\,|\,a,b)=\frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)}=\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\ , \qquad (7.16)$$

де $B(a,b)=\int_0^1 z^{a-1}(1-z)^{b-1}\mathrm{d}z$ – *beta*-функція.

Щільність розподілу доданків при обраних значеннях параметрів має *U-образний* вигляд, дуже далекий від нормального. Переконаємося в цьому, побудувавши графік щільності.

Щоб **статистично** оцінити закон розподілу для суми *S,* слід багаторазово (*N* разів, наприклад, *N*=500), промоделювати підсумовування: одержимо S_1, S_2, ..., S_N – вибірку для суми. Для цієї вибірки побудуємо гістограму і порівняємо її візуально з нормальною щільністю.

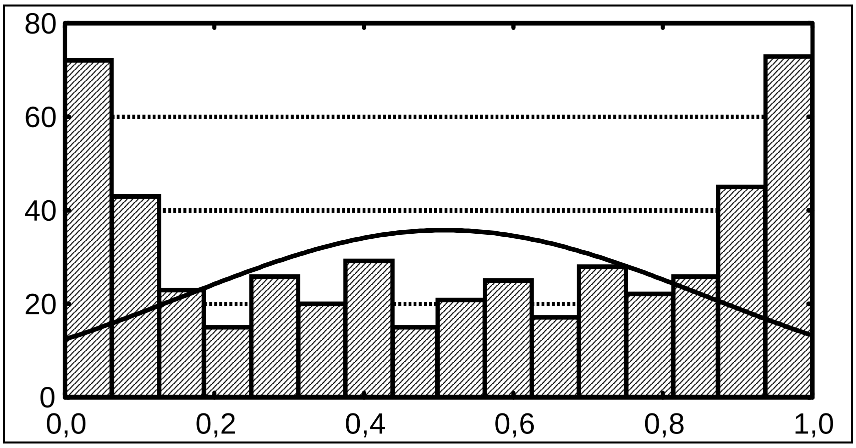


Рис.7.10 – Гістограма одного доданка

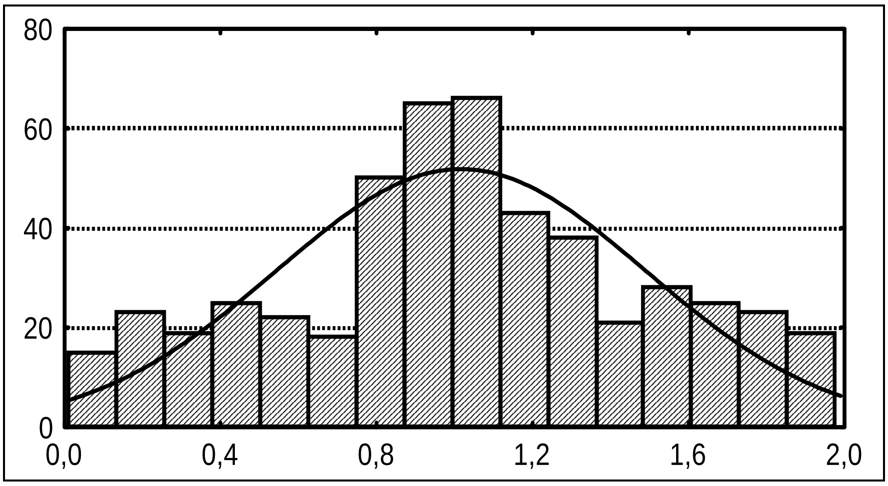


Рис.7.11 – Гістограма суми двох доданків

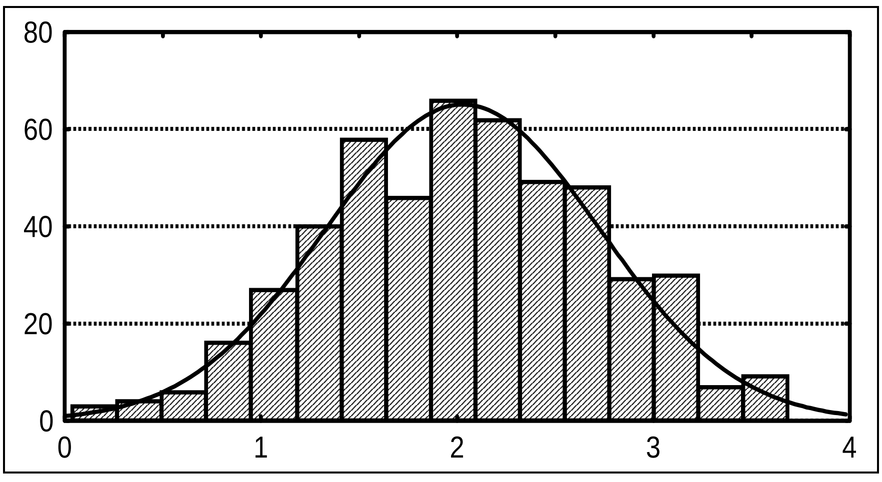


Рис.7.12 – Гістограма суми чотирьох доданків

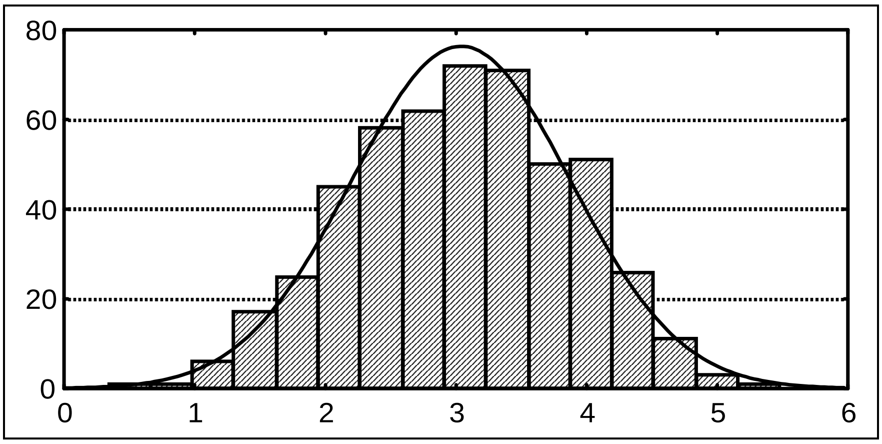


Рис.7.13 – Гістограма суми шести доданків

На закінчення нагадаємо, що відповідно до центральної граничної теореми розподіл суми випадкових величин збігається до нормального і в тому випадку, коли доданки розподілені за ***різними*** законами розподілу.

7.4. Практикум і запитання для самоконтролю

7.1. Сформулювати теорему Бернуллі.

7.2. Навести нерівність Чебишова і пояснити її зміст.

7.3. Сформулювати теорему Чебишова.

7.4. Як поводиться щільність розподілу середньоарифметичного значення випадкової величини з ростом числа доданків у порівнянні з щільністю розподілу самої випадкової величини?

7.5. Сформулювати теорему Бореля.

7.6. Сформулювати теорему Колмогорова.

7.7. Сформулювати теорему Колмогорова у спрощеній постановці.

7.8. Сформулювати теорему Глівенка (*основну теорему статистики*).

7.9. Що стверджує центральна гранична теорема?

7.10. Сформулювати теорему Ляпунова.

7.11. У чому полягає наслідок центральної граничної теореми?

В І Д П О В І Д І

1.1. Основна мета дисципліни – сприяти подальшому підвищенню рівня фундаментальної математичної підготовки студентів. **1.2.** Методи "Теорії ймовірностей" використовуються в теорії надійності; теорії масового обслуговування; теоретичній фізиці; геодезії; астрономії; теорії стрілянини; теорії помилок спостережень; теорії автоматичного управління; загальної теорії зв'язку; медичній і технічній діагностиках; теорії розпізнавання образів; радіолокаційній техніці; стохастичному програмуванні та в багатьох інших теоретичних і прикладних науках. **1.3.** Предметом теорії ймовірностей є вивчення ймовірнісних закономірностей однорідних випадкових явищ. **1.4.** Явище вважається випадковим, якщо неможливо передбачити всі чинники, від яких воно залежить. **1.5.** Подією є будь-який факт, який у результаті експерименту може відбутися або не відбутися. **1.6.** Під експериментом розуміють деяку сукупність умов, при яких спостерігається те або інше явище, фіксується той або інший результат. **1.7.** Ймовірністю події називається чисельна міра ступеня об'єктивної можливості появи події в результаті нового експерименту. **1.8.** Достовірною є подія, яка у результаті експерименту неодмінно повинна відбутися. **1.9.** Ймовірність достовірної події дорівнює одиниці. **1.10.** Неможливою є подія, яка у результаті експерименту не може відбутися. **1.11.** Ймовірність неможливої події дорівнює нулю. **1.12.** Випадковою називається подія, яка при кількаразовому повторенні експерименту в результаті одних з них відбувається, а в інших – ні. **1.13.** Ймовірність випадкової події приймає значення з діапазону від нуля до одиниці. **1.14.** Декілька подій в експерименті називаються рівноможливими, якщо за умовами симетрії експерименту немає підстави вважати появу якоїсь з них більш можливою, ніж появи інших. **1.15.** Декілька подій називаються несумісними, якщо ніякі дві з них не можуть відбутися одночасно в одному експерименті. **1.16.** Повною групою подій називаються декілька попарно несумісних подій таких, що в результаті експерименту одна з них неодмінно повинна відбутися. **1.17.** Випадками називають виходи експерименту, які утворюють повну групу несумісних рівноможливих подій. **1.18.** Випадки називаються сприятливими до події, якщо їх поява тягне за собою появу цієї події. **1.19.** $P(A) = m/n$, де n – загальна кількість випадків в експерименті, m – кількість випадків, що сприятливі до появи події А. **1.20.** Позначимо: A – подія, що полягає в появі принаймні однієї "решки" при киданні двох монет. Тоді $P(A)$ – шукана ймовірність. Можливими виходами експерименту є чотири випадки. Перший випадок: на першій монеті – "орел", на другій також "орел". Другий випадок:

на першій монеті – "орел", на другій – "решка". Третій випадок: на першій монеті – "решка", на другій – "орел". Четвертий випадок: на першій монеті – "решка", на другій також "решка". Отже, загальна кількість можливих виходів експерименту $n = 4$. З чотирьох випадків другий, третій і четвертий є сприятливими до розглянутої події. Отже, кількість сприятливих виходів $m = 3$. Підставляючи в класичну формулу визначення ймовірності знайдені значення для n і m, одержимо: $P(A) = m/n = 3/4$. **1.21.** $P(A) = = m/n = 3/37$. **1.22.** $P(A) = m/n = 2/4 = 1/2$. **1.23.** $P(A) = m/n = 1/4$. **1.24.** $P(A) = m/n = 12/32 = 3/8$. **1.25.** $P(A) = m/n = (25–3–2–1)/25 = 19/25$. **1.26.** В комбінаториці розрізняють три види різноманітних з'єднань: перестановки, розміщення і сполучення. **1.27.** Перестановками з m елементів називають такі їх з'єднання, які відрізняються одне від одного тільки порядком входження елементів. **1.28.** Загальне число перестановок з m елементів обчислюється за формулою $P_m = m!$ **1.29.** $P_5 = 5! = = 1*2*3*4*5 = 120$. **1.30.** Розміщеннями з n елементів по m називають такі з'єднання m елементів, які відрізняються одне від одного принаймні одним новим елементом або порядком їх входження. **1.31.** Загальне число розміщень з n елементів по m обчислюється за формулою $A_n^m = n!/(n–m)!$ **1.32.** $A_5^3 = 5!/(5–3)! = (1*2*3*4*5)/(1*2) = 60$. **1.33.** Сполученнями з n елементів по m називають такі з'єднання m елементів, які відрізняються одне від одного принаймні одним новим елементом. **1.34.** Загальне число сполучень з n елементів по m обчислюється за формулою $C_n^m = n! / [m! (n – – m)!]$. **1.35.** $C_5^3 = 5!/[3!*(5 – 3)!] = (1*2*3*4*5)/[(1*2)*(1*2*3)] = 10$. **1.36.** Шукана кількість способів дорівнює числу перестановок з 30 елементів, тобто 30! **1.37.** Шукана кількість способів дорівнює числу розміщень з 8 елементів по 3, тобто $A_8^3 = 8!/(8–3)! = 336$. **1.38.** Шукана кількість способів дорівнює числу сполучень з 10 елементів по 5, тобто $C_{10}^5 = 10! / [5!*(10– –5)!] = 252$. **1.39.** Число перестановок з 3 елементів, тобто $P_3 = 6$. **1.40.** Число розміщень з 4 елементів по 3, тобто $A_4^3 = 24$. **1.41.** $A_4^3 – A_3^2 = 18$. **1.42.** $A_2^2 + A_2^1 + A_2^0 = 5$. **1.43.** $A_3^3 + A_3^2 + A_3^1 + A_3^0 = 16$. **1.44.** $A_6^1 + + A_6^2 + A_6^3 + A_6^4 + A_6^5 + A_6^6 = 6 + 30 + 120 + 360 + 720 + 720 =1956$. **1.45.** ***а)*** $A_5^2 + A_5^2 = 40$; ***б)*** $P_5 + P_5 = 240$. **1.46, *а)*** $P_5 – P_4 = 5! – 4! = 96$; ***б)*** $P_5 – P_3 = = 5! – – 3! = 114$; ***в)*** $P_5 – P_2 = 5! – 2! = 118$. **1.47.** $P(A) = m/n = 1/90$. **1.48, *а)*** 1/720; ***б)*** 1/120. **1.49.** 1/5! = 1/120. **1.50.** 3!/6! = 1/120. **1.51.** (2!*2!)/6!=1/60. **1.52, *а)*** 1/60; ***б)*** 1/10. **1.53.** $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{15}^4 * C_{10}^2}{C_{25}^6} = 0{,}0762$. **1.54.** Нехай A – подія, яка полягає в тому, що гравець викреслить 6 з 6 виграшних чисел. Тоді $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{C_{36}^6} = = \frac{1}{1947792} \approx 0{,}0000005$. **1.55.** Нехай A – подія, яка полягає в тому, що гравець викреслить 3 з 6 виграшних чисел. Тоді

$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_6^3*C_{30}^3}{C_{36}^6} = =\frac{20*4060}{1947792}\approx 0{,}0416882$. **1.56.** Нехай А – подія, яка полягає в тому, що гравець одержить грошовий виграш. Тоді $P(A)=\frac{m}{n}=$

$$=\frac{C_6^6*C_{30}^0+C_6^5*C_{30}^1+C_6^4*C_{30}^2+C_6^3*C_{30}^3}{C_{36}^6}=\frac{1\cdot 1+6\cdot 30+15\cdot 435+20\cdot 4060}{1947792}\approx$$

$\approx 0{,}0451311$. **1.57.** Загальна кількість варіантів розміщення 10 чоловік на 10 місцях дорівнює числу перестановок з 10 елементів (див. завдання **1.36**), тобто n = 10! = 4082400. Нехай дві окремі особи займають 1-е і 2-е місця, тоді інші можуть розміститися 8! способами. Крім того, ці особи можуть сидіти на місцях 2 і 3, 3 і 4 і т.д., тобто кількість варіантів зростає в 10 разів. До того ж ці особи можуть помінятися місцями. Отже, кількість сприятливих варіантів розміщень m = 8!*10*2 = 907200. Тоді шукана ймовірність $P = m/n \approx 0{,}222$. **1.58,** ***а*)** 1/90; ***б)*** 1/81. **1.59.** Елементарною називають подію, якій відповідає тільки один результат (вихід) експерименту. **1.60.** Множина елементарних подій, що складає повну групу несумісних подій, називається простором подій. **1.61.** Довільний набір елементарних подій з простору подій **U** є випадковою подією. **1.62.** Елементарні події, яким відповідають елементи з підмножини випадкової події, називаються сприятливим до цієї події. **1.63.** Якщо події не відповідає жодний елемент з простору подій, то вона називається неможливою. **1.64.** Якщо події відповідають всі елементи з простору подій, то вона називається достовірною. **1.65.** Сумою двох подій A і B називають таку подію, яка відбувається тоді, коли відбувається або подія A, або подія B, або події A і B одночасно в одному експерименті. **1.66.** Добутком двох подій A і B називають таку подію, яка відбувається тоді, коли відбувається і подія A, і подія B одночасно в одному експерименті. **1.67.** $S = A_2 + A_4 + A_5 + A_6$. **1.68.** $S = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 + A_4B_4 + A_5B_5 + A_6B_6$. **1.69.** $S = A_5B_6C_6 + A_6B_5C_6 + A_6B_6C_5$. **1.70.** $S = A_5B_6C_6 + A_6B_5C_6 + A_6B_6C_5 + A_6B_6C_6$. **1.72,** ***а*)** 30/36; ***б)*** 6/36. **1.73.** Простір подій:

	Д1	Д2	Д3
П1	**1:1**	**1:2**	**1:3**
П2	**2:1**	**2:2**	**2:3**
П3	**3:1**	**3:2**	**3:3**

Тут П1, П2, П3 – кількість пальців, які показує перший гравець; Д1, Д2, Д3 – кількість пальців, які показує другий гравець. ***а*)** Ймовірність того, що загальне кількість показаних пальців непарна, дорівнює 4/9. ***б)*** Ймовірність того, що загальна кількість показаних пальців менша двох, дорівнює 0.

в) Ймовірність того, що загальне число показаних пальців просте, дорівнює 5/9. **1.74.** Простір подій в умовах завдання відповідає таблиці:

	Д1	**Д2**	**Д3**
П1	1 : 1	1 : 2	1 : 3
П2	2 : 1	2 : 2	2 : 3
П3	3 : 1	3 : 2	**3 : 3**

Тут П1, П2, П3 – кількість пальців, що показуються першим гравцем (перша цифра в парі П : Д); Д1, Д2, Д3 – кількість пальців, що показуються другим гравцем (друга цифра в парі П : Д). ***а***) Ймовірність того, що, принаймні, один гравець показав менше трьох пальців, дорівнює 8/9, оскільки загальна кількість елементарних подій дорівнює 9 (кількість клітинок з парами чисел П : Д), а кількість виходів, що сприятливі, дорівнює 8 (усі клітинки з парами чисел П : Д, крім клітинки 3 : 3. ***б)*** Щоб визначити ймовірність того, що перший гравець показав один палець за умови, що загальна кількість показаних пальців менша або дорівнює чотирьом, спочатку необхідно побудувати новий простір подій, в якому реалізовано вказану умову. Йому відповідають виділені клітинки в таблиці:

	Д1	**Д2**	**Д3**
П1	**1 : 1**	**1 : 2**	**1 : 3**
П2	**2 : 1**	**2 : 2**	2 : 3
П3	**3 : 1**	3 : 2	3 : 3

Кількість сприятливих виходів у новому просторі подій дорівнює 3 (рядок П1 таблиці). За класичною формулою шукана ймовірність буде дорівнювати 3/6. **1.75.** Простір подій:

	Д1	**Д5**	**Д10**	**Д25**
П1	**1 :1**	**1 : 5**	**1 : 10**	**1 : 25**
П5	**5 : 1**	**5 : 5**	**5 : 10**	**5 : 25**
П10	**10 : 1**	**10 : 5**	**10 : 10**	**10 : 25**
П25	**25 : 1**	**25 : 5**	**25 : 10**	**20 : 20**

Тут П1, П5, П10, П25 – номінали першої монети; Д1, Д5, Д10, Д25 – номінали другої монети. Події 1:1, 5:5, і т.д. неможливі, оскільки за умовою маємо по одній монеті кожного номіналу. Звідси загальна кількість подій дорівнює 12. ***а***) Ймовірність того, що обидві монети номіналом менше 10, дорівнює 2/12; ***б)*** Ймовірність того, що хлопчик вийняв менше 20 копійок, дорівнює 6/12. **1.76, *а*)** 10/12; ***б)*** 6/12 . **1.77.** Операції підсумовування і множення подій мають наступні властивості: комутативність, асоціативність і дистрибутивність.

2.1. Основними теоремами теорії ймовірностей називають теорему про ймовірність суми двох подій і теорему про ймовірність добутку двох подій. **2.2.** Ймовірність суми двох подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій за відрахуванням імовірності добутку цих же подій. **2.3.** Ймовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій. **2.4.** Дві події називаються протилежними, якщо вони утворюють повну групу несумісних подій. **2.5.** Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці. **2.6.** Події є незалежними, якщо ймовірність кожної з них не залежить від того, відбулися інші події або ні. **2.7.** Умовною ймовірністю називають імовірність одної з залежних подій, що обчислена за умови появи іншої події. **2.8.** Умовна ймовірність позначається $P_A(B)$ або $P(B/A)$. **2.9.** Ймовірність добутку двох подій дорівнює ймовірності однієї з них, помноженої на умовну ймовірність іншої за умови, що перша подія відбулася. **2.10.** Ймовірність добутку двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій. **2.11.** Під надійністю технічної системи розуміють імовірність її безвідмовної роботи за певний період часу. **2.12.** У залежності від способу з'єднання елементів системи підрозділяються на послідовні, рівнобіжні, мостові і змішані. **2.13.** Ймовірність появи хоча б однієї з n незалежних сумісних подій дорівнює одиниці мінус добуток імовірностей не появи цих подій. **2.14.** Ймовірність безвідмовної роботи системи послідовно з'єднаних елементів дорівнює добутку ймовірностей безвідмовної роботи цих елементів. **2.15.** Ймовірність безвідмовної роботи системи з нескінченого числа послідовно з'єднаних елементів дорівнює нулю. **2.16.** 0,14. **2.17.** 0,7. **2.18,** ***а)*** 0,188; ***б)*** 0,452; ***в)*** 0,336; ***г)*** 0,024. **2.19,** ***а)*** 0,6976; ***б)*** 0,9572. **2.20.** Позначимо: A – студент знає відповідь на перше запитання; B – студент знає відповідь на друге запитання; C – студент знає відповідь на третє запитання; D – студент знає відповіді на всі три запропоновані йому запитання; $P(A)$ – ймовірність того, що студент знає відповідь на перше запитання; $P_A(B)$ – ймовірність того, що студент знає відповідь на друге запитання за умови, що він також знає відповідь на перше запитання; $P_{A*B}(C)$ – ймовірність того, що студент знає відповідь на третє запитання за умови, що він також знає відповіді на перше і друге запитання. Подія D – студент знає відповіді на всі три запропоновані йому запитання – є складною подією і є добутком всіх трьох подій: $D = A*B*C$. Якщо узагальнити теорему 2 на декілька подій, то ймовірність події D буде визначатися виразом $P(A*B*C) = P(A)*P_A(B)*P_{A*B}(C)$, тобто $P(A*B*C) =$ $= (20/25)*(19/24)*(18/23) = 57/115$. **2.21.** Позначимо: подія A – відмова 1-го елемента; подія B – відмова 2-го елемента; подія C – відмова всього пристрою. Тоді ймовірність безвідмовної роботи 1-го елемента $P(\overline{A}) =$ $= 1 – 0,05 = 0,95$, а ймовірність безвідмовної роботи 2-го елемента $P(\overline{B}) =$ $= 1 – 0,08 = 0,92$. Ймовірність події C – ймовірність відмови пристрою – визначимо через протилежну подію: $P(C) = 1– P(\overline{C}) = 1– P(\overline{A}*\overline{B}) =$

$= 1 - P(\overline{A}) * P(\overline{B}) = 1 - 0{,}95 * 0{,}92 = 0{,}126$. **2.22.** Хоча б одне влучення – це подія, що полягає в будь-якому можливому виході при чотирьох пострілах, крім одночасного промаху в усіх чотирьох пострілах. Тому ймовірність хоча б одного влучення при чотирьох пострілах треба шукати через імовірність протилежної події, тобто ймовірність одночасного промаху в усіх чотирьох пострілах. Позначимо: подія A – хоча б одне влучення при чотирьох пострілах; подія $\overline{A}$ — одночасний промах у всіх чотирьох пострілах; $\overline{A}_1$ – промах при 1-му пострілі; $\overline{A}_2$ – промах при 2-му пострілі; $\overline{A}_3$ – промах при 3-му пострілі; $\overline{A}_4$ – промах при 4-му пострілі; x – невідома ймовірність влучення при одному пострілі; $\overline{x}$ – ймовірність промаху при одному пострілі. Тоді ймовірність хоча б одного влучення при чотирьох пострілах визначиться як $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{A}_1 * \overline{A}_2 * \overline{A}_3 * \overline{A}_4) =$ $= 1 - P(\overline{A}_1) * P(\overline{A}_2) * P(\overline{A}_3) * P(\overline{A}_4)$. Вважаємо, що імовірність промаху (влучення) у ціль при кожному пострілі однакова, тобто $P(\overline{A}_1) = P(\overline{A}_2) =$ $= P(\overline{A}_3) = P(\overline{A}_4) = \overline{x}$. Тоді $P(A) = 1 - (\overline{x})^4$. За умовою завдання $P(A) =$ $0{,}9984$. Маємо рівняння с одним невідомим: $0{,}9984 = 1 - (\overline{x})^4$. Звідки $\overline{x} =$ $0{,}2$. Ймовірність влучення при одному пострілі визначиться як імовірність протилежної події: $x = 1 - \overline{x} = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$. **2.23.** Ймовірність безвідмовної роботи системи паралельно з'єднаних елементів дорівнює одиниці мінус добуток імовірностей відмови цих елементів. **2.24.** Ймовірність безвідмовної роботи системи з нескінченого числа послідовно з'єднаних елементів дорівнює одиниці. **2.25.** Розрахунок надійності змішаних систем заснований на циклічному процесі заміни ділянок системи з однотипним з'єднанням елементів одним елементом з еквівалентною надійністю. **2.26.** $P(A) = p_1^2[1-(1-p_2)^2]$. **2.27.** $P(A) = p_3[1-(1-p_2)(1-p_1p_2)]$. **2.28.** $P(A) =$ $= p_3\,[1-(1-p_1^2p_2)\,(1-p_3)\,(1-p_2^2)]$.

3.1. Формула повної ймовірності використовується для визначення середньої ймовірності події A, яка може відбутися тільки з однією з повної групи несумісних гіпотез (подій), коли відомі апріорні ймовірності гіпотез і умовні ймовірності настання події A за умови, що відбулася та або інша гіпотеза. **3.2.** $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)$. **3.3.** 0,85. **3.4.** 0,86. **3.5.** Формула Байєса дозволяє визначати апостеріорні ймовірності гіпотез. **3.6.** Якщо деяка подія A може відбутися тільки з одною з повної групи несумісних подій (гіпотез) H_i ($i=1,2,\ldots,n$) і відомі апріорні ймовірності гіпотез $P(H_i)$, умовні ймовірності $P(A/H_i)$ події A за умови, що здійснилася та або інша гіпотеза, а також відомо, що подія A відбулася, то апостеріорна ймовірність гіпотези H_j ($j \in \{1,2,\ldots,n\}$) визначається за формулою

$P\left(H_j / A\right)=\frac{P\left(H_j\right) P\left(A / H_j\right)}{\sum_{i=1}^{n} P\left(H_i\right) P\left(A / H_i\right)}$. **3.7.** Формула повної ймовірності є складовою частиною формули Байєса. **3.8.** Формула Байєса застосовується в розпізнаванні образів для виявлення об'єктів по їх нечіткому зображенню, технічній діагностиці для пошуку пошкодження, у медичній діагностиці для постановки діагнозу хворому, у радіолокаційній техніці для відділення сигналу від шуму й у багатьох інших завданнях, коли необхідно виявити ймовірну причину (гіпотезу) події, що вже відбулася. **3.9.** Більш імовірною є стрілянина з гвинтівки без оптичного прицілу, оскільки апостеріорна ймовірність пострілу з гвинтівки без оптичного прицілу (0,558) більше апостеріорної ймовірності пострілу з гвинтівки з оптичним прицілом (0,442). **3.10.** ***а)*** 0,5; ***б)*** 4/15. **3.11.** Введемо позначення: A – подія, що полягає у влученні двох снарядів у ціль при залпі з трьох гармат; H_1 – гіпотеза, що полягає в промаху першою з гармат; H_2 – гіпотеза, що полягає у влученні першою з гармат; B_2 – подія, що полягає у влученні другою з гармат; $\overline{B}_2$ – подія, що полягає в промаху другою з гармат; B_3 – подія, що полягає у влученні третьою з гармат; $\overline{B}_3$ – подія, що полягає в промаху третьою з гармат. Тоді за умовою задачі $P(H_2)$ = 0,4 , а ймовірність протилежної події $P(H_1)$ = 1 – 0,4 = 0,6. Умовна ймовірність $P(A/H_1)$ – це ймовірність того, що перша гармата дасть промах, а дві інші – влучення, тобто $P(A/H_1) = P(H_1B_2B_3)$ = 0,6*0,3*0,5 = 0,09. Умовна ймовірність $P(A/H_2)$ – це ймовірність того, що перша гармата дасть влучення, а одна з двох, що залишились, дасть промах, тобто $P(A/H_2) = P(H_2\overline{B}_2B_3) + P(H_2B_2\overline{B}_3)$ = = 0,4*(1–0,7)*0,5+0,4*0,3*(1–0,5) = 0,2. Шукану ймовірність (апостеріорна ймовірність промаху першою з гармат) знайдемо за формулою Байєса: $P\left(H_1 / A\right)=\frac{P\left(H_1\right) P\left(A / H_1\right)}{\sum_{i=1}^{2} P\left(H_i\right) P\left(A / H_i\right)}=\frac{0{,}6*0{,}09}{0{,}6*0{,}09+0{,}4*0{,}2}\approx 0{,}4$. **3.12.** Експерименти є незалежними, якщо ймовірність появи деякої події в одних експериментах не залежить від її появи в інших експериментах. **3.13.** Якщо робиться n незалежних випробувань, у кожному з який подія A з'являється з однаковою імовірністю p, то ймовірність того, що в цих випробуваннях подія A відбудеться рівно k разів (байдуже, в якій послідовності) визначається за формулою $P_n(k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. **3.14.** Рекомендується використовувати формулу Бернуллі при числі випробувань, що не перевищує числа 10. **3.15.** 0,08192. **3.16.** Позначимо через A подію, що полягає в появі *простого* числа при одному киданні гральної кістки. Простими числами на гральній кістці є 1, 2, 3 і 5, тобто число виходів m, сприятливих події A, дорівнює 4. Загальне число виходів при одному киданні гральної кістки дорівнює 6. Тоді ймовірність появи події A, відповідно до класичної формули ймовірності, визначиться як $p = m/n =$ $= 4/6 = 2/3$. Багаторазові кидання гральної кістки є незалежними експериментами, у кожному з який подія A з'являється з однаковою ймовірністю $p = 2/3$. Отже, шукана ймовірність появи події A рівно 5 разів у 8 випробуваннях може бути визначена за допомогою формули Бернуллі: $P_8(5) = C_8^5 p^5(1-p)^{8-5} = 56*(2/3)^5*(1-2/3)^{8-5} \approx 0,2731$. **3.17.** $P(A) = P_4(3) +$ $+ P_4(4) = C_4^3 p^3(1-p)^{4-3} + C_4^4 p^4(1-p)^{4-4} = 4*0,4^3*(1-0,4) + 1*0,4^4*1 =$ $= 0,1536 + 0,0256 = 0,1792$. **3.18.** Якщо робиться n незалежних випробувань, у кожному з який подія A з'являється з однаковою ймовірністю p, то ймовірність того, що в цих випробуваннях подія A відбудеться рівно k разів (байдуже, у якій послідовності) може бути оцінена (тим точніше, чим більше n) за формулою $P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}\varphi(x)$, де $\varphi(x)$ – функція Гаусса, $x = \frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}$. **3.19.** Теорема Бернуллі дозволяє визначити точне значення ймовірності, а локальна теорема Лапласа – тільки оцінку. **3.20.** Функція Гаусса симетрична щодо осі ординат, оскільки вона є парною функцією. **3.21.** Нулю, оскільки аргумент за модулем перевищує значення 4. **3.22.** 0,04565. **3.23.** Якщо робиться n незалежних випробувань, у кожному з який подія A з'являється з однаковою ймовірністю p, то ймовірність того, що в цих випробуваннях подія A відбудеться не менше k_1 разів і не більше ніж k_2 разів (байдуже, у якій послідовності) може бути оцінена (тим точніше, чим більше n) за формулою $P_n(k_1,k_2) \approx \int_{x_1}^{x_2}\varphi(x)dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, де $x_1 = \frac{k_1-np}{\sqrt{np(1-p)}}$; $x_2 = \frac{k_2-np}{\sqrt{np(1-p)}}$; $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – функція Лапласа. **3.24.** Інтегральна теорема Лапласа призначена для оцінки ймовірності того, що число появ деякої події при багаторазовому повторенні незалежних експериментів потрапить у заданий діапазон. **3.25.** Функція Лапласа має центральну симетрію щодо початку системи координат, оскільки є непарною функцією. **3.26.** Функція Лапласа від аргументу –6,7 дорівнює 0,5, тому що аргумент за модулем перевищує значення 5. **3.27,** ***а)*** 0,8882; ***б)*** 0,8944; ***в)*** 0,1056; ***г)*** 0,1512. **3.28.** Найімовірнішим числом настання події A в n незалежних експериментах при однаковій ймовірності настання події A в кожному з них називається число k_0, якому відповідає максимальна ймовірність $P_n(k)$, тобто число $k_0 = \arg\left(\max_{k=\overline{1,n}}\{P(k)\}\right)$. **3.29.** $np-q \le k_0 \le np+p$. **3.30.** Особливості подвійної нерівності: значення правої частини перевищує значення лівої рівно на одиницю; k_0 – ціле число; всередині діапазону значень $[np-q; np+p]$ може знаходитися тільки одне ціле число, або два – на його границях. **3.31.** Визначення k_0 здійснюють у наступній послідовності. Спочатку обчислюють величину *np*. Якщо *np* – ціле число, то $k_0 = np$. Якщо *np* – не ціле число, визначають величину *np+p*. Якщо (*np+p)* – ціле число, то існує два найімовірніших числа: $k_{01}=np+p$ і $k_{02}=k_{01}–1$. Якщо (*np+p)* – не ціле число, то k_0 – ціле число в діапазоні [*np–q*; *np + p*]. **3.32, *а)*** 3; ***б)*** 1 і 2; ***в)*** 1.

4.1. Випадковою називають величину, яка в результаті експерименту приймає заздалегідь невідоме значення. **4.2.** Дискретними називають випадкові величини, які в результаті експерименту приймають значення з лiченої множини (скінченної або нескінченної). **4.3.** Неперервними називають випадкові величини, які в результаті експерименту приймають значення з неперервної множини (обмеженої або необмеженої). **4.4.** Закон розподілу випадкової величини – це співвідношення, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними ймовірностями. **4.5.** Існує дві ефективні форми завдання закону розподілу дискретної випадкової величини: ряд розподілу та інтегральна функція розподілу. **4.6.** Ряд розподілу - це таблиця, що складається з двох рядків і задає закон розподілу дискретної випадкової величини. **4.7.** Шуканий ряд розподілу:

x_i	0	1	2
p_i	1/4	1/2	1/4

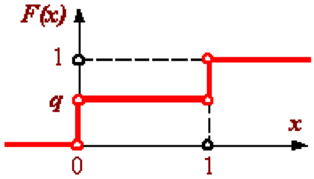
4.8. Шуканий ряд розподілу:

x_i	0	1	2
p_i	1/45	16/45	28/45

4.9. Інтегральна функція розподілу випадкової величини *X* – це функція *F*(*x*), яка при кожному значенні свого аргументу *x* чисельно дорівнює ймовірності того, що випадкова величина *X* опиниться менше, ніж значення аргументу. **4.10.** Інтегральна функція розподілу випадкової величини має наступні властивості: інтегральна функція від мінус нескінченності дорівнює нулю; інтегральна функція від плюс нескінченності дорівнює одиниці; інтегральна функція – функція, що не зменшується. **4.11.** Шуканий ряд розподілу:

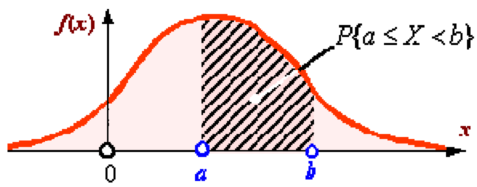
x_i	0	1
p_i	q	p

Тут $q = 1 - p$. Інтегральна функція розподілу:



4.12. $P\{a \le X < b\} = F(b) - F(a)$. **4.13.** Існує дві ефективні форми подання закону розподілу неперервної випадкової величини: інтегральна функція розподілу і щільність розподілу ймовірності. **4.14.** Інтегральна функція дискретної випадкової величини – східчаста функція, тобто стрибкоподібно зростаюча функція, а інтегральна функція неперервної випадкової величини – монотонно зростаюча функція. **4.15.** Ймовірність конкретного значення неперервної випадкової величини дорівнює нулю. **4.16.** Щільністю розподілу ймовірності неперервної випадкової величини називається перша похідна від інтегральної функції розподілу. **4.17.** $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$. **4.18.** Інтеграл у нескінченних границях від щільності розподілу дорівнює одиниці. **4.19.** Щільність розподілу – функція невід'ємна. **4.20.** $P\{a \le X < b\} = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$.

4.21. Ймовірність влучення неперервної випадкової величини на задану ділянку числової осі (a, b) чисельно дорівнює заштрихованій площі на графіку щільності розподілу.



4.22. Математичне сподівання, мода і медіана. **4.23.** Математичне сподівання – це середньовиважене за ймовірностями значення випадкової величини. **4.24.** Математичне сподівання характеризує зміщення значень випадкової величини на числовій осі відносно початку координат. **4.25.** $m_x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i$. **4.26.** $m_x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$. **4.27.** Модою називають найбільш імовірне значення випадкової величини. **4.28.** Медіаною називають таке значення Me випадкової величини X, для якого справедлива рівність $P\{X < Me\} = P\{X > Me\}$. **4.29.** Ні. **4.30.** Математичне сподівання дорівнює 1,2. Мода дорівнює 2. **4.31.** Початковим моментом k-го порядку називають математичне сподівання k–го степеня випадкової величини. **4.32.** $\alpha_k = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^k p_i$. **4.33.** $\alpha_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,dx$. **4.34.** Центрованою випадковою величиною називають відхилення значення випадкової величини від її математичного сподівання. **4.35.** Центральним моментом s-го порядку називають математичне сподівання s-го степеня центрованої випадкової величини. **4.36.** $\mu_s = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^s p_i$. **4.37.** $\mu_s = \int_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)^s f(x)\,dx$. **4.38.** Знак «=». **4.39.** 0. **4.40.** Початковий момент 2-го порядку випадкової величини характеризує ступінь відхилення випадкової величини навколо її математичного сподівання, а також зміщення випадкової величини на числовій осі відносно початку координат. **4.41.** $\alpha_2 = M[X^2] = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$. **4.42.** $\alpha_2 = M[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx$. **4.43.** Другий початковий момент використовується для визначення другого центрального моменту. **4.44.** Центральний момент 2-го порядку характеризує ступінь відхилення випадкової величини навколо її математичного сподівання. **4.45.** Знак «=». **4.46.** $D_x = \alpha_2 - m_x^2$. **4.47.** Середнє квадратичне відхилення являє собою квадратний корінь з дисперсії. **4.48.** Середнє квадратичне відхилення характеризує теж саме, що і дисперсія. **4.49.** $\alpha_2 = 2{,}16$; $D_x = 0{,}72$; $\sigma_x = 0{,}85$. **4.50.** Побудуємо спочатку ряди розподілу для випадкових величин X_1 і X_2:

x_{1i}	0	1
p_{1i}	0,3	0,7

x_{2i}	0	1
p_{2i}	0,4	0,6

У побудованих законах розподілу ймовірності промахів визначаються як імовірності протилежних подій, відповідно: $q_1=1-p_1=1-07=0{,}3$; $q_2=1-p_2=1-$ $-0{,}6=0{,}4$. Отримані ряди розподілу дозволяють побудувати ряд розподілу для випадкової величини $X=X_1-X_2$. Визначимо спочатку можливі значення випадкової величини X та відповідні ймовірності: якщо $X_1=0$ і $X_2=1$ то $X=-1$, а ймовірність виходу $q_1{*}p_2=0{,}18$; якщо $X_1=0$ і $X_2=0$ або $X_1=1$ і $X_2=1$ то $X=0$, а ймовірність виходу $q_1{*}q_2 + p_1{*}p_2 = 0{,}54$; якщо $X_1=1$ і $X_2=0$ то $X=1$, а ймовірність виходу $q_1{*}p_2 = 0{,}28$. Шуканий ряд розподілу:

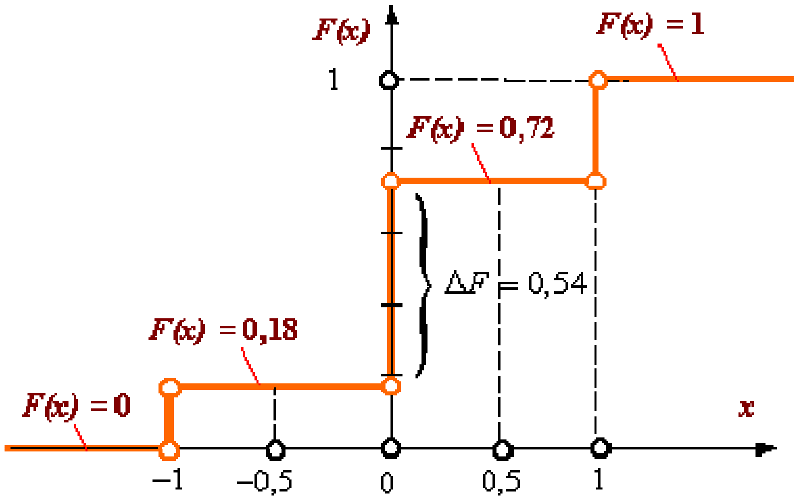
x_i	–1	0	1
p_i	0,18	0,54	0,28

Ряд розподілу дозволяє побудувати таблицю і графік інтегральної функції розподілу.

Табличне подання інтегральної функції випадкової величини X

Індекс діапазону	Діапазон x	$F(x)$
1	$x \le -1$	$F(x) = P\{X<x\} = 0$
2	$-1 \le x < 0$	$F(x) = P\{X<x\} = P(X=-1) = 0{,}18$
3	$0 \le x < 1$	$F(x) = P\{X<x\} = P(X=-1)+P(X=0)=0{,}18 + 0{,}54 = 0{,}72$
4	$x>1$	$F(x) = P\{X<x\} = P(X=-1) + P(X=0) + P(X=1) =$ $= 0{,}18 + 0{,}54 + 0{,}28 = 1$

Графік інтегральної функції:



Математичне сподівання визначимо за формулою (4.9):

$$m_x = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = (-1)\cdot 0{,}18 + 0\cdot 0{,}54 + 1\cdot 0{,}28 = 0{,}1.$$

Для визначення дисперсії D_x попередньо знайдемо другий початковий момент α_2 за допомогою формули (4.15):

$$\alpha_2 = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 p_i = (-1)^2\cdot 0{,}18 + 0^2\cdot 0{,}54 + 1^2\cdot 0{,}28 = 0{,}46.$$

Тепер за формулою зв'язку (4.19) визначимо дисперсію

$$D_x = \alpha_2 - m_x^2 = 0{,}46 - (0{,}1)^2 = 0{,}45.$$

За формулою (4.20) порахуємо середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{0{,}45} \approx 0{,}67.$$

Ймовірність $P\{-0{,}5 \le X < 0{,}5\}$ визначимо за формулою (4.2) :

$$P\{-0{,}5 \le X < 0{,}5\} = F(0{,}5) - F(-0{,}5) = F(0{,}5) - F(-0{,}5) = 0{,}72 - 0{,}18 = 0{,}54.$$

Дану операцію доцільно здійснювати за допомогою графіка $F(x)$.

4.51. Перед тим, як обчислювати шукані величини, необхідно визначити параметр a в заданій щільності розподілу $f(x)$. Для визначення параметра скористаємося 1-ою властивістю щільності розподілу, відповідно до якої визначений інтеграл у нескінченних границях від щільності розподілу дорівнює одиниці. Візьмемо інтеграл

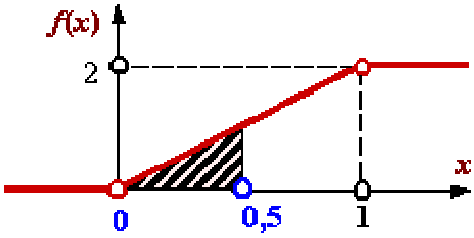
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0\cdot dx + \int_{0}^{1} ax\cdot dx + \int_{1}^{\infty} 0\cdot dx = \left.\frac{ax^2}{2}\right|_0^1 = \frac{a}{2}.$$

Потім дорівняємо результат узяття інтегралу одиниці: $\frac{a}{2} = 1$. Звідси $a = 2$.

Підсумковий вираз для щільності розподілу набуває вигляду

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin[0,1];\\ 2x, & x\in[0,1].\end{cases}$$

Графік $f(x)$:



Для визначення інтегральної функції скористаємося зворотним перетворенням (4.5). Оскільки щільність розподілу є кусочно-неперервною функцією, що має три діапазони з різним виглядом підінтегральної функції, то зворотним перетворенням необхідно скористатися три рази:

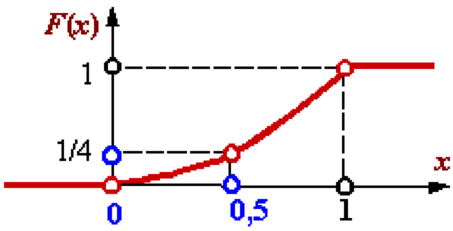
для діапазону $x<0$ $\qquad F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dx=\int\limits_{-\infty}^{x} 0\,dx=0;$

для діапазону $0\le x\le 1$ $\qquad F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dt+\int\limits_{0}^{x} 2t\,dt=0+t^2\Big|_0^x=x^2;$

для діапазону $x>1$ $\qquad F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dt+\int\limits_{0}^{1} 2t\,dt+\int\limits_{1}^{x} 0\,dt=0+t^2\Big|_0^1+0=1.$

Таким чином, $\qquad F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x\le 0;\\ x^2, & \text{якщо} \quad 0<x\le 1\\ 1, & \text{якщо} \quad x>1.\end{cases}$

Графік інтегральної функції $F(x)$:



Для визначення математичного сподівання скористаємося формулою (4.10)

$$m_x=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0} x\cdot 0\cdot dx+\int\limits_{0}^{1} x\cdot 2x\cdot dx+\int\limits_{1}^{\infty} x\cdot 0\cdot dx=0+2\int\limits_{0}^{1} x^2 dx=\frac{2x^3}{3}\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}.$$

З метою подальшого визначення дисперсії D_x обчислимо спочатку другий початковий момент:

$$\alpha_2=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0} x^2\cdot 0\cdot dx+\int\limits_{0}^{1} x^2\cdot 2x\cdot dx+\int\limits_{1}^{\infty} x^2\cdot 0\cdot dx=0+2\int\limits_{0}^{1} x^3 dx=\frac{2x^4}{4}\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}.$$

Використовуючи формулу (4.19), що зв'язує дисперсію з початковими моментами, визначимо D_x:

$$D_x = \alpha_2 - m_x^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}.$$

За формулою (4.20) знайдемо середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{\frac{1}{18}} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

За визначенням медіани $P\{X<Me\} = P\{X>Me\}$, але $P\{X<Me\} = F(Me) = 0{,}5$. Отже медіану можна знайти з рівняння $F(Me) = 0{,}5$, що ми і зробимо:

$$\int_{-\infty}^{Me} f(x)dx = 0{,}5;$$

$$\int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{Me} 2x dx = 0{,}5;$$

$$x^2\Big|_0^{Me} = 0{,}5;$$

$$(Me)^2 = 0{,}5;$$

$$Me \approx 0{,}71.$$

Останню шукану величину $P\{0 \le X < 0{,}5\}$ визначимо двома способами:

$$P\{0 \le X < 0{,}5\} = \begin{cases} F(b) - F(a) = F(0{,}5) - F(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 0^2 = \frac{1}{4}; \\ \int_a^b f(x)dx = \int_0^{0{,}5} 2xdx = x^2\Big|_0^{0{,}5} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 0^2 = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Знайденій імовірності на наведеному вище графіку щільності розподілу відповідає площа заштрихованої області.

4.52. Третій центральний момент характеризує ступінь відхилення випадкової величини навколо математичного сподівання, а також ступінь асиметрії її закону розподілу. **4.53.** $\mu_3 = M\left[(X - m_x)^3\right] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^3 p_i$. **4.54.** $\mu_3 = M\left[(X - m_x)^3\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^3 f(x)\, dx$. **4.55.** Коефіцієнт асиметрії характеризує ступінь асиметрії закону розподілу. Коефіцієнт асиметрії визначається за формулою $s = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}$. **4.56.** 0,144. **4.57.** Четвертий центральний момент характеризує ступінь відхилення випадкової величини навколо математичного сподівання, а також ступінь гостровершинності її закону розподілу. **4.58.** Величина ексцес характеризує ступінь гостровершинності закону розподілу, заданого за допомогою щільності розподілу. Величина ексцес визначається за формулою $E = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3$.

5.1. Випадкова величина розподілена за біноміальним законом, якщо її ряд розподілу має вигляд:

x_i	0	1	. . .	m	. . .	n
p_i	$(1\text{-}p)^{\text{n}}$	$np(1\text{-}p)^{n\text{-}1}$	. . .	$C_n^{\,m}\, p^m(1\text{-}p)^{n\text{-}m}$	. . .	p^n

5.2. Ряд розподілу випадкової біноміальної величини з параметрами розподілу p=0,6 і n=4:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,0256	0,1536	0,3456	0,3456	0,1296

5.3. $M[X] = np$. **5.4.** $D[X] = np(1–p)$. **5.5.** $\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{np(1-p)}$. **5.6.** $P\{k_1 \le X \le k_2\} = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$. **5.7.** Випадковим потоком подій називаються події, що відбуваються одна за одною у випадкові моменти часу. **5.8.** Найпростішим потоком подій називається потік подій, який має наступні три властивості: стаціонарність, ординарність і відсутність післядії. **5.9.** Випадковий потік подій називається стаціонарним, якщо ймовірність влучення певного числа подій на заданий інтервал часу залежить тільки від довжини інтервалу T і не залежить від того, де на числовій осі t розташований цей інтервал. **5.10.** Випадковий потік подій називається ординарним, якщо ймовірність влучення двох і більше подій на нескінченно малий інтервал занадто мала в порівнянні з імовірністю влучення однієї події на цей інтервал. **5.11.** Випадковий потік подій називається потоком без післядії, якщо ймовірність влучення певного числа подій на інтервал часу довжиною T не залежить від того, скільки подій потрапило на будь-який інший інтервал, що не перетинається з першим. **5.12.** Випадкова величина розподілена за законом Пуассона, якщо її ряд розподілу має вигляд

x_i	0	1	. . .	m	. . .
p_i	e^{-a}	$a\, e^{-a}$	. . .	$(a\, e^{-a})/m!$	. . .

5.13. $M[X] = a$. **5.14.** $D[X] = a$. **5.15.** $\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{a}$. **5.16.** Параметр a = =λT = 4 блоки. **а)** $P(X{=}10) = P(X{\le}10) - P(X{\le}9) = 0{,}00529$; ***б)*** $P(X{>}10)$ = = $1 - P(X{\le}9)$; ***в)*** $P(X{<}10) = P(X{\le}9)$. **5.17.** Функція розподілу ймовірності: $P(X = k) = \dfrac{a^k}{k!} e^{-a} = \dfrac{3^k}{k!} e^{-3},\ k = 0{,}1{,}2{,}...$ ***а)*** $P(X{\le}2) = 1–Q(2{,}3) = 1–0{,}577$ = = 0,423; ***б)*** $P(X{>}0) = Q(0{,}3)$. **5.18.** За умовою задачі математичне сподівання кількості викликів за годину m_{x} = 30, тоді математичне сподівання кількості викликів за хвилину m_{x} = 30/60 = 0,5. $P(X{\ge}2)$ = = $P(X{>}1) = Q(1;0{,}5)$ = 0,0902. **5.19.** Параметр $a = np$ = 1000*0,002 = 2. Тоді

$P(X=3)=\frac{a^3}{3!}e^{-a}=\frac{2^3}{3!}e^{-2}\approx 0{,}18$ (1-й спосіб), або $P(X=3) = Q(2{,}2) - Q(3{,}2) =$ $= 0{,}323 - 0{,}143 = 0{,}18$ (2-й спосіб). **5.20.** Параметр $a = np = 100000*0{,}0001 =$ $= 10$, $P(X=5)=\frac{a^5}{5!}e^{-a}=\frac{10^5}{5!}e^{-10}\approx 0{,}1029$. **5.21.** Параметр $a = np = 200*0{,}01 = 2$. Тоді $P(X=4)=\frac{a^4}{4!}e^{-a}=\frac{2^4}{4!}e^{-2}\approx 0{,}09$ (1-й спосіб), або $P(X = 4) = Q(3{,}2) -$ $- Q(4{,}2) = 0{,}142 - 0{,}052 = 0{,}09$ (2-й спосіб). **5.22.** Параметр $a = np =$ $= 500 * 0{,}002 = 1$. ***а)*** $P(X=3)=\frac{a^3}{3!}e^{-a}=\frac{1^3}{3!}e^{-1}\approx 0{,}0613$ (1-й спосіб), або $P(X=3) = Q(2{,}1) - Q(3{,}1) = 0{,}0803 - 0{,}0190 = 0{,}0613$ (2-й спосіб); ***б)*** $P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=\frac{1^0}{0!}e^{-1}+\frac{1^1}{1!}e^{-1}+\frac{1^2}{2!}e^{-1}=\frac{5}{2}e^{-1}\approx 0{,}9197$ (1-й спосіб), або (2-й спосіб) $P(X<3) = 1 - Q(2{,}1) = 1 - 0{,}0803 = 0{,}9197$; ***в)*** $P(X>3) =$ $= Q(3{,}1) = 0{,}19$; ***г)*** $P(X>0) = Q(0{,}1) = 0{,}632$. **5.23.** Задану за умовою задачі ймовірність можна відобразити через рівняння $0{,}98 = 1 - P(X = 0)$, або $0{,}02=\frac{a^0}{0!}e^{-a}$. Звідки $e^{-a} = 0{,}02$ і $a \approx 4$. Таким чином, середня кількість відмов дорівнює 4. **5.24.** Неперервна величина розподілена за рівномірним законом, якщо її щільність розподілу має вигляд: $f(x)=\begin{cases}0, & x\notin[a,b];\\ c, & x\in[a,b].\end{cases}$

5.25. Інтегральна функція рівномірно розподіленої величини має вигляд: $F(x)=\begin{cases}0, & x<a;\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b;\\ 1, & x>b.\end{cases}$ **5.26.** $M[X] = (a+b)/2$. **5.27.** $D_x=\frac{(b-a)^2}{12}$. **5.28.** $\sigma_x=\sqrt{D_x}=\frac{(b-a)\sqrt{3}}{6}$. **5.29.** $[\alpha,\beta]\subset[a,b] \Rightarrow P\{\alpha\le X<\beta\}=\frac{\beta-\alpha}{b-a}$. **5.30, *а*)** 1/4; ***б*)** 1. **5.31.** 3/5. **5.32.** 1/3. **5.33.** 3. **5.34.** Випадкова величина розподілена за показовим законом, якщо її щільність розподілу має вигляд: $f(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ \lambda e^{-\lambda t}, & t\ge 0,\end{cases}$ де λ – інтенсивність подій, тобто кількість подій в одиницю часу. **5.35.** Інтегральна функція випадкової величини, яка розподілена за показовим законом, має вигляд $F(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ 1-e^{-\lambda t}, & t\ge 0.\end{cases}$ **5.36.** $m_x=\frac{1}{\lambda}$. **5.37.** $D_t=\frac{1}{\lambda^2}$. **5.38.** $\sigma_x=\sqrt{D_x}=\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}}=\frac{1}{\lambda}$. **5.39.** $P\{a\le T<b\}=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}$. **5.40.** $f(x)=\begin{cases}5e^{-5x}, & \text{якщо } x\ge 0;\\ 0, & \text{якщо } x<0.\end{cases}$

$F(x)=\begin{cases}1-e^{-5x}, & \text{якщо } x\ge 0;\\ 0, & \text{якщо } x<0.\end{cases}$ **5.41.** Визначимо інтегральну функцію: $F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0.\end{cases}$ Шукана ймовірність: $P\{0\le X<m_x\}=P\{0\le X<\frac{1}{\lambda}\}=$ $=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}=1-e^{-1}\approx 0{,}632.$ **5.42.** $P\{0{,}13\le X<0{,}7\}=e^{-3\cdot 0{,}13}-e^{-3\cdot 0{,}7}\approx 0{,}555$. **5.43.** 0,2. **5.44.** Визначимо константу c: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$; $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=$ $=\int\limits_{-\infty}^{0}0\,dx+\int\limits_{0}^{\infty}c\,e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{\infty}=0-\frac{c}{-\lambda}=\frac{c}{\lambda}$; $\frac{c}{\lambda}=1$. Звідси $c=\lambda$. **5.45.** Випадкова величина розподілена за нормальним законом, якщо її щільність розподілу має вигляд: $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, де σ і m – параметри розподілу. **5.46.** Інтегральна функція нормально розподіленої випадкової величини має вигляд: $F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}dt$. **5.47.** Математичне сподівання дорівнює параметру m . Середнє квадратичне відхилення дорівнює параметру σ. Дисперсія дорівнює $\sigma^{2.}$ **5.48.** $\mu_s=(s-1)\mu_{s-2}\sigma^2$. **5.49.** Коефіцієнт асиметрії нормально розподіленої величини дорівнює нулю. **5.50.** Коефіцієнт гостровершинності нормально розподіленої випадкової величини дорівнює нулю. **5.51.** $P\{a\le X<b\}=\hat{O}\left(\frac{b-m}{\sigma}\right)-\hat{O}\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$. **5.52.** m_x=5, D_x=25. **5.53.**

$$P\{15<X<25\}=\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{25-20}{5}\right)-\Phi\left(\frac{15-20}{5}\right)=2\Phi(1)\approx$$

$\approx 0{,}6826$. **5.54.** $P\{|X|<10\}=\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{10-0}{20}\right)-\Phi\left(\frac{10-0}{20}\right)=$ $=2\Phi(0{,}5)\approx 0{,}383.$

5.55. $P=1-P\{d_1<D<d_2\}=1-\left[\hat{O}\left(\frac{d_2-\frac{d_1+d_2}{2}}{\frac{d_2-d_1}{4}}\right)\right]-\left[\hat{O}\left(\frac{d_1-\frac{d_1+d_2}{2}}{\frac{d_2-d_1}{4}}\right)\right]=$

$=1-[\Phi(2)-\Phi(-2)]=1-2\Phi(2)=1-2\cdot 0{,}4772=0{,}0456$. **5.56.** Якщо випадкова величина розподілена за нормальним законом, то абсолютне значення її відхилення від математичного сподівання не перевершує потроєного середньоквадратичного відхилення. **5.57.** Якщо незалежні випадкові величини u_i розподілені за стандартним нормальним законом, тобто за нормальним законом з параметрами m = 0 і σ = 1, тоді випадкова величина $\chi^2=\sum\limits_{i=1}^{n}u_i^2$ розподілена за законом хі-квадрат з числом ступенів свободи k, рівним n. **5.58.** Якщо випадкова величина u розподілена за стандартним нормальним законом, а випадкова величина v розподілена за законом хі-квадрат з ступенем свободи k і не залежить від u, тоді випадкова величина $t = \frac{u}{\sqrt{v/k}}$ розподілена за законом Ст'юдента з числом ступенів свободи k.

5.59. Якщо незалежні випадкові величини u і v розподілені за законом хі-квадрат відповідно зі ступенями свободи k_1 і k_2, тоді випадкова величина $F = \frac{u/k_1}{v/k_2}$ розподілена за законом Фішера зі ступенями свободи k_1 і k_2.

6.1. Випадковим вектором називають вектор, компоненти якого є випадкові величини. **6.2.** Інтегральна функція розподілу випадкового вектора – це така функція декількох випадкових аргументів, яка при конкретних значеннях своїх аргументів чисельно дорівнює ймовірності того, що всі компоненти випадкового вектора виявляться менше за відповідні аргументи. **6.3.** Інтегральна функція двовимірного випадкового вектора **Z** = (X,Y) має чотири властивості. 1-а властивість: $F(-\infty,-\infty)=0$; $F(x,-\infty)=0$; $F(-\infty,y)=0$. 2-а властивість: $F(\infty,\infty)=1$. 3-я властивість: $F(x,\infty)=P\{X<x, Y\to\infty\}=P\{X<x\}=F_1(x)$; $F(\infty,y)=P\{X\to\infty, Y<y\}=$ $=P\{Y<y\}=F_2(y)$. 4-а властивість: $F(x,y)$ – функція, що не зменшується від обох своїх аргументів. **6.4.** Вправа виконується відповідно до формули $P\{(X,Y)\in\Delta\mathbf{Z}\}=F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x,y+\Delta y)-F(x+\Delta x,y)+F(x,y)$, яка у даному випадку трансформується у вираз $P\{(X,Y)\in\Delta Z\} = F(x_2,y_2) - F(x_1,y_2) -$ $- F(x_2,y_1) + F(x_1,y_1)$. **6.5.** Щільність розподілу двовимірного випадкового вектора являє собою другу часткову похідну від інтегральної функції розподілу цього вектора. **6.6.** $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(t,\tau)\,dt\,d\tau.$ **6.7.** Перша властивість щільності розподілу означає, що об'єм, який укладено між поверхнею функції $f(x,y)$ і координатною площиною, дорівнює одиниці. **6.8.** $f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$; $f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$. **6.9.** Третя властивість щільності розподілу означає, що поверхня функції $f(x,y)$ не може бути розташованою нижче координатної площини $X0Y$. **6.10.** Друга властивість щільності розподілу двовимірного випадкового вектора визначається двома рівностями $f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$; $f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$. Доведемо першу:

$$f_1(x)=F'(x)=\frac{d}{dx}\left[F(x,\infty)\right]=\frac{d}{dx}\left[\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(t,y)\,dt\,dy\right]=\frac{d}{dx}\left[\int_{-\infty}^{x}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(t,y)\,dy\right\}dt\right]=$$

$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t,y)dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$. Для доказу була використана змінна t, щоб відрізнити її від відповідної границі інтегрування x. Аналогічно доводиться друга рівність. **6.11.** Умовний закон розподілу у формі $f(x/y)$ або $F(x/y)$ – це закон розподілу випадкової величини X, яку обчислено за умови, що випадкова величина Y набула конкретне значення. **6.12.** Випадкові величини X і Y є незалежними, якщо закон розподілу випадкової величини X не залежить від того, яке значення набуває випадкова величина Y. **6.13.**

$F(x_1,x_2,x_3) = \int\limits_{-\infty}^{x_1}\int\limits_{-\infty}^{x_2}\int\limits_{-\infty}^{x_3} f(t_1,t_2,t_3)dt_1\,dt_2\,dt_3$;

$F(x_1) = F(x_1,\infty,\infty)\int\limits_{-\infty}^{x_1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t_1,t_2,t_3)dt_1\,dt_2\,dt_3$; $\quad f(x_2,x_3) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2,x_3)dx_1$;

$f(x_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2,x_3)dx_1\,dx_3$; $\quad f(x_1/x_2,x_3) = \dfrac{f(x_1,x_2,x_3)}{f(x_2,x_3)} = \dfrac{f(x_1,x_2,x_3)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2,x_3)dx_1}$;

$f(x_1,x_3/x_2) = \dfrac{f(x_1,x_2,x_3)}{f(x_2)} = \dfrac{f(x_1,x_2,x_3)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_3}$. **6.14.** Математичним сподіванням випадкового вектора є такий невипадковий вектор, компонентами якого є математичні сподівання відповідних компонент випадкового вектора. **6.15.** Дисперсією випадкового вектора є такий невипадковий вектор, компонентами якого є дисперсії відповідних компонент випадкового вектора X. **6.16.** Кореляційним моментом k_{xy} двовимірного випадкового вектора $Z=(X,Y)$ називають другий змішаний центральний момент $k_{xy} = \mu_{11} = M[(X-m_x)(Y-m_y)]$. **6.17.** Для дискретних величин кореляційний момент визначається за формулою $k_{xy} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}(x_i - m_x)(y_j - m_y)p_{ij}$, де $p_{ij} = P\ (X = x_i, Y = y_j)$; m_x – математичне сподівання компоненти X випадкового вектора **Z**; m_y – математичне сподівання компоненти Y випадкового вектора **Z**; n – кількість можливих значень компоненти X ; m – кількість значень компоненти Y. Для випадкових неперервних величин кореляційний момент визначається за формулою $k_{xy} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)(y-m_y)f(x,y)dxdy$, де $f(x,y)$ – щільність розподілу випадкового вектора **Z**. **6.18.** Кореляційний момент характеризує ступінь розкиду випадкових компонент вектора навколо їх математичних сподівань, а також ступінь лінійної залежності між цими компонентами. **6.19.** Коефіцієнт кореляції характеризує ступінь лінійної залежності між двома випадковими величинами. **6.20.** $r_{xy} = \dfrac{k_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$. **6.21.** Коефіцієнт кореляції може набувати значення з діапазону [–1; 1]. **6.22.** 1. **6.23.** –1.

6.24. Математичне сподівання невипадкової величини дорівнює самій випадковій величині. **6.25.** Дисперсія невипадкової величини дорівнює нулю. **6.26.** Так. **6.27.** Так, але попередньо необхідно константу піднести до другого степеня. **6.28.** Математичне сподівання суми випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань. **6.29.** Математичне сподівання лінійної функції Y від n випадкових аргументів X_i (i=1,2,…,n) дорівнює цій же функції від математичних сподівань випадкових величин X_i: $M[Y]=M\left[\sum\limits_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right]=\sum\limits_{i=1}^{n} a_i M[X_i]+b$. **6.30.** Дисперсія суми двох випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій, збільшеній на подвоєний кореляційний момент цих же величин. **6.31.** Дисперсія суми двох випадкових незалежних величин дорівнює сумі їх дисперсій. **6.32.** Дисперсія лінійної функції n випадкових незалежних аргументів X_i (i =1,2,…,n) визначається за формулою $D[Y]=D\left[\sum\limits_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right]=\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 D[X_i]$. **6.33.** Математичне сподівання добутку двох випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань, збільшеному на момент кореляції цих величин. **6.34.** Математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань. **6.35.** Дисперсія добутку незалежних випадкових величин X і Y визначається за формулою: $D[XY] = D[X] * D[Y] + m_y^2 D[X] + m_x^2 D[Y]$.

7.1. З імовірністю, як завгодно близькою до 1, очікується, що при досить великій кількості випробувань частота появи події буде як завгодно мало відрізнятися від її ймовірності. **7.2.** При будь-якому ε>0 справедлива нерівність $P\left(\left|\xi - M[\xi]\right| \geq \varepsilon\right) \leq \dfrac{D[\xi]}{\varepsilon^2}$, тобто абсолютне відхилення випадкової величини від її математичного сподівання більше або дорівнює ε з імовірністю, не більшою за відношення дисперсії цієї випадкової величини до квадрата ε. **7.3.** Якщо $\xi_1,..,\xi_n,..$ – послідовність попарно незалежних випадкових величин, що мають кінцеві дисперсії та обмежені однією і тією ж постійною: $D[\xi_1]<c, D[\xi_2]<c, \ldots, D[\xi_n]<c,$ то для будь-якого ε>0 $\mathrm{P}\left\{\left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i - \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} M[\xi_i]\right| < \varepsilon\right\} \to 1$, якщо $n\to\infty$. **7.4.** Стискується. **7.5.** Відносна частота появи випадкової події з ростом кількості незалежних випробувань прямує до дійсної ймовірності появи події з імовірністю 1. **7.6.** Якщо послідовність взаємно незалежних випадкових величин $\xi_1,..,\xi_n,\ldots$ задовольняє умові $\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty} D[\xi_n] < \infty$, то вона підкоряється посиленому закону великих чисел. **7.7.** Необхідною і достатньою умовою для застосовності посиленого закону великих чисел до послідовності незалежних величин є існування їх математичних сподівань. **7.8.** З ростом n максимальне абсолютне відхилення емпіричної функції розподілу від теоретичної (дійсної) прямує до нуля з імовірністю 1: $P\left(\sup_x |F_n^*(x) - F(x)| \underset{n\to\infty}{\to} 0\right) = 1$. **7.9.** Розподіл середнього арифметичного випадкових величин (при багаторазовому підсумовуванні середньоарифметичне стає випадковою величиною) наближається до нормального з параметрами a (математичне сподівання) і σ^2/n (дисперсія): $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \sim N(a, \frac{\sigma^2}{n})$, де $\sigma^2 = D[\xi_i]$. **7.10.** Якщо $s_n = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$ – сума незалежних випадкових величин, $A_n = M[s_n]$, $B_n^2 = D[s_n]$ і виконується умова Ляпунова (при будь-якому $\delta > 0$ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^{2+\delta}}\sum_{k=1}^{n} M\left[|\xi_k - a_k|^{2+\delta}\right] = 0$), то розподіл випадкової величини s_n наближається до нормального з параметрами A_n і B_n^2. **7.11.** Якщо незалежні випадкові розміри $\xi_1, \xi_2, ... , \xi_n$ однаково розподілені й мають кінцеву відмінну від нуля дисперсію, то виконується умова Ляпунова. При цьому розподіл суми $s_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ з ростом n наближається до нормального з параметрами $A_n = M[s_n]$, $B_n^2 = D[s_n]$.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК. СЛОВНИК ТЕРМІНІВ

Апріорна ймовірність гіпотези 49 – ймовірність гіпотези, що має місце до здійснення експерименту

Апостеріорна ймовірність гіпотези 52 – ймовірність гіпотези, що має місце після здійснення експерименту

Байєса формула 52 – формула для визначення апостеріорних імовірностей гіпотез

Бернуллі теорема 142 – частота появи випадкової події з ростом кількості незалежних випробувань прямує до ймовірності події

Бернуллі формула 58 – формула для визначення ймовірності того, що в n незалежних випробуваннях певна подія відбудеться рівно k разів

Біноміальний закон розподілу 97 – окремий закон розподілу дискретної випадкової величини

Бореля теорема 147 – одне з тверджень посиленого закону великих чисел

Величина ексцес 88, 114 – числова характеристика ступеня гостровершинності щільності розподілу випадкової величини

Випадки 14 – виходи експерименту, що утворюють повну групу несумісних рівноможливих подій

Випадкова величина 67 – величина, яка в результаті експерименту набуває заздалегідь невідоме значення

Випадкова величина дискретна 67 – випадкова величина, можливі значення якої належать лічeній множині

Випадкова величина неперервна 67 – випадкова величина, можливі значення якої належать неперервній множині

Випадкова величина центрована 83 – відхилення випадкової величини від її математичного сподівання

Випадкова подія 12, 23 – подія, яка при багаторазовому повторенні експерименту в результаті одних відбувається, а в інших ні

Випадкове явище 10 – явище, що залежить від чинників (умов), які неможливо передбачити

Закон розподілу показовий 108 – окремий закон розподілу неперервної величини

Закон розподілу Пуассона 101 – окремий закон розподілу дискретної випадкової величини

Закон розподілу рівномірний 105 – окремий закон розподілу неперервної випадкової величини

Закон розподілу умовний 128 – закон розподілу однієї випадкової величини за умови прийняття конкретних(ого) значень(ня) іншими(ою) випадковими(ою) величин(ою)

Залежні величини 128 – випадкові величини, серед яких одні мають закони розподілу, що залежать від конкретних значень інших

Залежні події 33 – група подій, імовірності яких залежать від того, відбулися якійсь інші події в групі або не відбулися

Ймовірність 11 – число з діапазону від 0 до 1, що характеризує ступінь об’єктивної можливості відбутися чомусь випадковому (гіпотезі, значенню параметра, події, явищу і т.п.)

Ймовірність повна 49 – середня ймовірність події, що може відбутися тільки з однією з повної групи несумісних подій (гіпотез)

Ймовірність події 12 – чисельна міра ступеня об'єктивної можливості появи події в результаті нового експерименту

Ймовірність умовна 33 – ймовірність залежної події, обчислена за умови, що відбулася подія, від якої залежить перша

Інтегральна теорема Лапласа 61 – теорема, що оцінює ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях деяка подія відбудеться не менше k_1 разів і не більше k_2 разів

Інтегральна функція розподілу 69 – універсальна форма завдання закону розподілу випадкових величин

Класична формула ймовірності 15 – якщо m – кількість випадків, що сприяють події A, а n – загальна кількість випадків у даному експерименті, то ймовірність події P(A) = m/n

Колмогорова теорема 149 – одне з тверджень посиленого закону великих чисел

Кореляційна матриця 130 – матриця кореляційних моментів

Кореляційна матриця нормована 130 – матриця кореляційних коефіцієнтів

Неперервна випадкова величина 67 – випадкова величина, можливі значення якої належать неперервній множині

Нерівність Чебишова 143 – при будь-якому ε>0 абсолютне відхилення випадкової величини від її математичного сподівання більше або дорівнює ε з імовірністю не більше відношення дисперсії цієї випадкової величини до квадрата ε

Несумісні події 13 – події, які в результаті експерименту не можуть відбутися одночасно

Нормальний закон розподілу 111 – окремий закон розподілу неперервної випадкової величини

Нормальний закон розподілу стандартний 114 – нормальний закон розподілу з параметрами $m = 0$; $\sigma = 1$

Нормована кореляційна матриця 130 – матриця кореляційних коефіцієнтів

Нерестановки 18 – з'єднання (комбінації) із m елементів, що відрізняються одне від одного тільки порядком входження елементів

Перший початковий момент 84 – математичне сподівання випадкової величини

Пірсона розподіл 116 – окремий закон розподілу

Повна група подій 14 – група подій, одна з яких обов'язково відбувається в результаті експерименту

Повна ймовірність 49 – середня ймовірність події, що може відбутися тільки з однією з повної групи несумісних подій (гіпотез)

Повної (середньої) ймовірності формула 50 – формула для визначення повної ймовірності подій (гіпотез)

Подія 11 – усякий факт, який в результаті експерименту може відбутися або не відбутися

Подія випадкова 12, 23 – подія, яка при багаторазовому повторенні експерименту в результаті одних відбувається, а в інших ні

Подія достовірна 12, 23 – подія, яка в результаті експерименту неодмінно повинна відбутися

Подія елементарна 22 – подія, якій відповідає тільки один результат (вихід) експерименту

Подія неможлива 12, 23 – подія, яка в результаті експерименту не може відбутися

математичного сподівання не перевершує потроєного середньоквадратичного відхилення

Простір подій 22 – повна група несумісних подій

Протилежні події 32 – дві несумісні події, що складають повну групу подій

Пуассонівський закон розподілу 101 – окремий закон розподілу дискретної випадкової величини

Рівномірний закон розподілу 105 – окремий закон розподілу неперервної випадкової величини

Рівноможливі події 13 – події, які мають однаковий ступінь об'єктивної можливості відбутися в результаті експерименту

Розміщення 19 – з'єднання (комбінації) із n елементів по m , що відрізняються один від одного хоча б одним новим елементом або порядком їх входження

Розподіл Пірсона 116 – окремий закон розподілу

Розподіл Ст’юдента 117 – окремий закон розподілу

Розподіл Фішера 118 – окремий закон розподілу

Розподіл хі-квадрат 116 – окремий закон розподілу

Ряд розподілу 69 – форма завдання закону розподілу дискретної випадкової величини

Середнє квадратичне відхилення 86 – числова характеристика розсіювання випадкової величини навколо її математичного сподівання, дорівнює квадратному кореню з дисперсії

Сполучення 19 – з'єднання (комбінації) із n елементів по m , що відрізняються один від одного хоча б одним новим елементом

Сприятливий випадок 14, 23 – випадок, що тягне за собою появу події

Стандартний нормальний закон розподілу 114 – нормальний закон розподілу з параметрами $m = 0$; $\sigma = 1$

Ст’юдента розподіл 117 – окремий закон розподілу

Сума подій 24 – складна подія, яка відбувається тоді, коли відбувається хоча б одна з подій, що підсумовуються

Теорема Бернуллі 142 – частота появи випадкової події із ростом незалежних випробувань прямує до ймовірності події

Теорема Бореля 147 – одне з тверджень посиленого закону великих чисел

Центральний момент другий 85 – дисперсія випадкової величини

Центральний момент третій 87 – числова характеристика розсіювання та асиметрії щільності розподілу випадкової величини

Центральний момент четвертий 88 – числова характеристика розсіювання і ступеня гостровершинності щільності розподілу випадкової величини

Центрована випадкова величина 83 – відхилення випадкової величини від її математичного сподівання

Чебишова нерівність 143 – при будь-якому $\varepsilon>0$ абсолютне відхилення випадкової величини від її математичного сподівання більше або дорівнює ε з імовірністю не більшою за відношення дисперсії цієї випадкової величини до квадрата ε

Чебишова теорема 144 – одне з тверджень закону великих чисел

Четвертий центральний момент 88 – числова характеристика розсіювання і ступеня гостровершинності щільності розподілу випадкової величини

Щільність розподілу 76 – форма завдання закону розподілу неперервних випадкових величин

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика – М.: Высш. шк., 2002. – 368 с.
2. *Гмурман В.Е.* Руководство по решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш. шк., 1979. – 400 с.
3. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 576 с.
4. *Жалдак М.І., Кузьміна Н.М., Берлінська С.Ю.* Теорія ймовірностей і математична статистика з елементами інформаційної технології. – К.: Вища школа, 1995. – 351 с.
5. *Крамер Г.* Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975. – 648 с.
6. *Мостеллер Ф., Рурке Р., Томас Дж. Вероятность.* – М.: Мир, 1969. – 431 с.
7. *Гильдерман Ю.И. Закон и случай.* – М.: Наука, 1991. – 200 с.
8. *Коваленко И.Н., Филиппова А.А.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш.шк., 1973. – 368 с.
9. *Коваленко И.Н., Гнеденко Б.В.* Теория вероятностей. – К.: Вища шк., 1990. – 328 с.
10. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1988. – 448 с.
11. *Гурский Е.И.* Теория вероятностей с элементами математической статистики. – М.: Высш.шк., 1971. – 328 с.
12. *Чистяков В.П.* Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1987.–240 с.
13. *Карасев А.И.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Статистика, 1979. – 279 с.
14. *Пугачев В.С.* Введение в теорию вероятностей. – М.: Наука, 1968.–368с.
15. *Румшинский Л.И.* Элементы теории вероятностей. – М.: Наука, 1976 – 239 с.

ДОДАТКИ

Додаток А. Значення функції Гаусса

x	+ 0	+ 0,01	+ 0,02	+ 0,03	+ 0,04	+ 0,05	+ 0,06	+ 0,07	+ 0,08	+ 0,09
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3032	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0789	0,0774	0,0759	0,0745	0,0731	0,0718	0,0705	0,0692	0,0680	0,0668
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

Додаток В. Значення функції Лапласа

x	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*
0,00	0,0000	0,43	0,1664	0,86	0,3061	1,29	0,4015	1,72	0,4573	2,30	0,4893
0,01	0,0040	0,44	0,1700	0,87	0,3078	1,30	0,4032	1,73	0,4582	2,32	0,4898
0,02	0,0080	0,45	0,1736	0,88	0,3106	1,31	0,4049	1,74	0,4591	2,34	0,4904
0,03	0,0120	0,46	0,1772	0,89	0,3133	1,32	0,4066	1,75	0,4599	2,36	0,4909
0,04	0,0160	0,47	0,1808	0,90	0,3159	1,33	0,4082	1,76	0,4608	2,38	0,4913
0,05	0,0199	0,48	0,1844	0,91	0,3186	1,34	0,4099	1,77	0,4616	2,40	0,4918
0,06	0,0239	0,59	0,1879	0,92	0,3211	1,35	0,4115	1,78	0,4625	2,42	0,4922
0,07	0,0279	0,50	0,1915	0,93	0,3238	1,36	0,4131	1,79	0,4633	2,44	0,4927
0,08	0,0319	0,51	0,1950	0,94	0,3264	1,37	0,4147	1,80	0,4641	2,46	0,4931
0,09	0,0359	0,52	0,1985	0,95	0,3289	1,38	0,4162	1,81	0,4649	2,48	0,4934
0,10	0,0398	0,53	0,2019	0,96	0,3315	1,39	0,4177	1,82	0,4656	2,50	0,4938
0,11	0,0438	0,54	0,2054	0,97	0,3340	1,40	0,4192	1,83	0,4665	2,52	0,4941
0,12	0,0478	0,55	0,2086	0,98	0,3365	1,41	0,4207	1,84	0,4671	2,54	0,4945
0,13	0,0517	0,56	0,2123	0,99	0,3389	1,42	0,4222	1,85	0,4678	2,56	0,4948
0,14	0,0557	0,57	0,2157	1,00	0,3413	1,43	0,4236	1,86	0,4686	2,58	0,4951
0,15	0,0596	0,58	0,2190	1,01	0,3438	1,44	0,4251	1,87	0,4693	2,60	0,4953
0,16	0,0636	0,59	0,2224	1,02	0,3461	1,45	0,4265	1,88	0,4699	2,62	0,4956
0,17	0,0675	0,60	0,2257	1,03	0,3485	1,46	0,4279	1,89	0,4706	2,64	0,4959
0,18	0,0714	0,61	0,2291	1,04	0,3508	1,47	0,4292	1,90	0,4713	2,66	0,4961
0,19	0,0753	0,62	0,2324	1,05	0,3531	1,48	0,4306	1,91	0,4719	2,68	0,4963
0,20	0,0793	0,63	0,2357	1,06	0,3554	1,49	0,4319	1,92	0,4726	2,70	0,4965
0,21	0,0832	0,64	0,2389	1,07	0,3577	1,50	0,4332	1,93	0,4732	2,72	0,4967
0,22	0,0871	0,65	0,2422	1,08	0,3599	1,51	0,4345	1,94	0,4738	2,74	0,4969
0,23	0,0910	0,66	0,2454	1,09	0,3621	1,52	0,4357	1,95	0,4744	2,76	0,4971
0,24	0,0948	0,67	0,2486	1,10	0,3643	1,53	0,4370	1,96	0,4780	2,78	0,4973
0,25	0,0987	0,68	0,2517	1,11	0,3665	1,54	0,4382	1,97	0,4756	2,80	0,4974
0,26	0,1026	0,69	0,2549	1,12	0,3686	1,55	0,4394	1,98	0,4761	2,82	0,4975
0,27	0,1064	0,70	0,2580	1,13	0,3708	1,56	0,4406	1,99	0,4767	2,84	0,4977
0,28	0,1103	0,71	0,2611	1,14	0,3729	1,57	0,4418	2,00	0,4772	2,86	0,4979
0,29	0,1141	0,72	0,2640	1,15	0,3749	1,58	0,4429	2,02	0,4783	2,88	0,4980
0,30	0,1179	0,73	0,2673	1,16	0,3770	1,59	0,4441	2,04	0,4793	2,90	0,4981
0,31	0,1217	0,74	0,2703	1,17	0,3790	1,60	0,4452	2,06	0,4803	2,92	0,4982
0,32	0,1255	0,75	0,2734	1,18	0,3810	1,61	0,4463	2,08	0,4812	2,94	0,4984
0,33	0,1293	0,76	0,2764	1,19	0,3830	1,62	0,4474	2,10	0,4821	2,96	0,4985
0,34	0,1331	0,77	0,2794	1,20	0,3849	1,63	0,4484	2,12	0,4830	2,98	0,4986
0,35	0,1368	0,78	0,2823	1,21	0,3869	1,64	0,4495	2,14	0,4838	3,00	0,4986
0,36	0,1406	0,79	0,2862	1,22	0,3883	1,65	0,4505	2,16	0,4846	3,20	0,4993
0,37	0,1443	0,80	0,2881	1,23	0,3907	1,66	0,4515	2,18	0,4854	3,40	0,4997
0,38	0,1480	0,81	0,2910	1,24	0,3925	1,67	0,4525	2,20	0,4861	3,60	0,4998
0,39	0,1517	0,82	0,2939	1,25	0,3944	1,68	0,4535	2,22	0,4868	3,80	0,4999
0,40	0,1554	0,83	0,2967	1,26	0,3962	1,69	0,4545	2,24	0,4875	4,00	0,5
0,41	0,1591	0,84	0,2995	1,27	0,3980	1,70	0,4554	2,26	0,4881	4,50	0,5
0,42	0,1628	0,85	0,3023	1,28	0,3997	1,71	0,4564	2,28	0,4887	5,00	0,5

Додаток С. Математичні відомості для довідок

Біном Ньютона

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^m a^{n-m} b^m + \cdots C_n^n a^0 b^n$$

Функціональний ряд

$$\frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x$$

Чудові ліміти

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. 2. $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{-\frac{1}{x}} = e$. 3. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\frac{a}{x}\right)^{-x} = e^{-a}$.

Правило Лопіталя. Якщо $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, причому функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ визначені в інтервалі, в якому знаходиться точка a, і мають у цьому інтервалі кінцеві похідні $[\psi'(x) \neq 0]$, і якщо

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = 0 \quad \text{і} \quad \lim_{x\to a} \psi(x) = 0 \ \text{(«невизначеність } \frac{0}{0}\text{»)}$$

або

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = \infty \quad \text{і} \quad \lim_{x\to a} \psi(x) = \infty \ \text{(«невизначеність } \frac{\infty}{\infty}\text{»)},$$

то

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$$

за умови, що цей ліміт існує або дорівнює ∞. У випадку, якщо $f(x) = \lim\limits_{x\to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ знову є невизначеністю типу $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$, то застосовують це правило вдруге і т.д.

Правило інтегрування вроздріб. Якщо підінтегральний вираз $f(x)dx$ визначеного інтегралу $\int_a^b f(x)dx$ можна подати довільним способом у вигляді udv, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu .$$

Додаток D. Основні формули диференціального числення

Правила диференціювання

$c' = 0$

$(cU)' = cU'$

$(U \pm V)' = U' \pm V'$

$(U \cdot V)' = U'V + UV'$

$\left(\dfrac{U}{V}\right)' = \dfrac{U'V + UV'}{V^2}$

$(f(U))_x' = f_U' \cdot U_x'$

Тут c – константа, $U = U(x)$, $V = V(x)$.

Основні формули диференціювання

$(U^a)' = aU^{a-1}U'$, $a \in \mathbf{R}$

$(\log_a U)' = \dfrac{U'}{U \ln a}$

$(\ln U)' = \dfrac{U'}{U}$

$(a^U)' = a^U \ln a \cdot U'$

$(\sin U)' = \cos U \cdot U'$

$(\cos U)' = -\sin U \cdot U'$

$(\mathrm{tg} U)' = \dfrac{1}{\cos^2 U} U'$

$(\mathrm{ctg} U)' = -\dfrac{1}{\sin^2 U} U'$

$(\arcsin U)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-U^2}} U'$

$(\arccos U)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-U^2}} U'$

$(\mathrm{arctg} U)' = \dfrac{1}{1+U^2} U'$

$(\mathrm{arcctg} U)' = -\dfrac{1}{1+U^2} U'$

Тут $U = U(x)$. Якщо $U(x) = x$, то $U'(x) = x' = 1$.

Додаток Е. Основні формули інтегрального числення

Правила інтегрування

1. Постійний множник можна виносити за знак інтеграла
$$\int a\,f(x)dx = a\int f(x)dx\,.$$

2. Інтеграл суми (різниці) дорівнює сумі (різниці) інтегралів від окремих членів
$$\int (u+v-w)dx = \int u\,dx + \int v\,dx - \int w\,dx\,.$$

3. Якщо $x=\varphi(t)$, то $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt$.

Таблиця невизначених інтегралів

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad (n\neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x|+C$$

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a|+C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \mathrm{tg}\,x\,dx = -\ln\cos x + C$$

$$\int \mathrm{ctg}\,x\,dx = \ln\sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\,x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\,x + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\frac{x}{a}+C$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C \quad (|x|<a)$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C \quad (|x|>a)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+C$$

Тут C – постійна інтегрування.

АВТОРСЬКИЙ КОЛЕКТИВ

	**САМОЙЛЕНКО Микола Іванович** Завідувач кафедри «Прикладна математика та інформаційні технології» Харківської національної академії міського господарства, доктор технічних наук, професор, лауреат премії МВССО УРСР (1988) . Випускник Харківського інституту радіоелектроніки (1970). Власник срібленої медалі міжнародного біографічного центру (Кембридж, 1999). Власник сертифікатів "Who's Who in the World" (США, 1999) и "Who's Who in Science and Engineering" (США,2000). Наукові інтереси: інформаційні технології, прикладна математика.
	**КУЗНЄЦОВ Анатолій Іванович** Проректор з науково-педагогічної роботи, завідувач кафедри «Інформаційні технології в міському господарстві» Харківської національної академії міського господарства, кандидат технічних наук, доцент, відмінник освіти України. Випускник Харківського інституту інженерів комунального будівництва (1971). Наукові інтереси: інформаційні технології, економіка і менеджмент, дистанційне навчання.
	**КОСТЕНКО Олександр Борисович** Доцент кафедри «Прикладна математика та інформаційні технології» Харківської національної академії міського господарства, кандидат фізико-математичних наук. Випускник Харківського державного університету (1977). Наукові інтереси: інформаційні технології, теорія ймовірностей і математична статистика, бази даних.

Навчальне видання

САМОЙЛЕНКО Микола Іванович,
КУЗНЄЦОВ Анатолій Іванович,
КОСТЕНКО Олександр Борисович

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Підручник

Редактор *М.З.Аляб'єв*
Коректор *З.І.Зайцева*
Комп'ютерна верстка *М.І.Самойленко*

План 2008, поз.13

Підп. до друку 10.02.2008. Формат 60×84/16.
Папір офісний. Друк на ризографі. Умовн.-друк.арк. 12,0
Обл.-вид. арк 13,0. Тираж 500 прим. Зам. №

61002 Харків, ХНАМГ, вул. Революції, 12

Сектор оперативної поліграфії ІОЦ ХНАМГ
Харків, вул. Революції, 12